Письменный экзамен за второй семестр (модули III, IV)

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Для получения 100%-ного результата достаточно набрать 60 баллов. Основное поле $\Bbbk$ всюду алгебраически замкнуто характеристики нуль.

Задача 1 (10 баллов). Покажите, что замыкание множества касательных прямых в гладких точках плоской проективной кривой $C \subset \mathbb{P}_2$ с однородным уравнением $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = 0$ является кривой в $\mathbb{P}_2^\times$, и явно напишите уравнение этой кривой.

Задача 2 (10 баллов). Покажите, что множество n-мерных проективных подпространств, лежащих на гладкой $2n$-мерной квадрике в $\mathbb{P}_{2n+1}$ является приводимым проективным многообразием. Найдите его размерность, число неприводимых компонент и выясните, связно ли оно.

Задача 3 (10 баллов). Пусть $X = \mathrm{Gr}(k, V)$ — грассманиан k-мерных подпространств в V, $E = V \times X$ — тривиальное расслоение со слоем V, $S \subset E$ — тавтологическое подрасслоение, и $Q = E/S$. Всякое $\Bbbk$-линейное дифференцирование $\xi : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ локальных регулярных функций на X продолжается до дифференцирования $1 \otimes \xi : V \otimes \mathcal{O}_X \to V \otimes \mathcal{O}_X$ локальных регулярных сечений расслоения E правилом $1 \otimes \xi(v \otimes f) \overset{\text{def}}{=} v \otimes \xi(f)$, и *вторая фундаментальная форма* сопоставляет (локальному) векторному полю ξ на X (локальное) отображение $\tilde{\xi} : \mathcal{S} \to \mathcal{Q}$ из пучка $\mathcal{S}$ (локальных) сечений расслоения S в пучок $\mathcal{Q}$ (локальных) сечений расслоения Q, переводящее сечение $s \in \mathcal{S} \subset V \otimes \mathcal{O}_X$ в $1 \otimes \xi(s) \bmod S \in \mathcal{Q}$. Покажите, что отображение $\tilde{\xi}$ является $\mathcal{O}_X$-линейным и правило $\xi \mapsto \tilde{\xi}$ задаёт $\mathcal{O}_X$-линейный изоморфизм $\mathcal{T}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{S}, \mathcal{Q})$ касательного расслоения T_X с расслоением $S^* \otimes Q$.

Задача 4 (10 баллов). Порождают ли квадратичные соотношения Плюккера $\omega \wedge \partial_I \omega = 0$, в которых ∂_I пробегает всевозможные (грассмановы) частные производные порядка $k-1$, однородный идеал грассманиана $\mathrm{Gr}(k, V)$, вложенного в $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$ по Плюккеру[1]?

Задача 5 (10 баллов). Пусть торическое многообразие $X(\Sigma)$ построено по вееру Σ в n-мерной решётке N, и пусть Σ имеет ровно m одномерных конусов, и они линейно порождают $\mathbb{Q} \otimes N$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$. Покажите, что группа Пикара[2] $\mathrm{Pic}(X)$ является свободной абелевой группой ранга не больше $m - n$ и приведите пример торического многообразия X, для которого это неравенство строгое.

Задача 6. Скрученной кубикой в $\mathbb{P}_3$ называется образ любого вложения $i : \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_3$, задаваемого в подходящих координатах правилом $i : (t_0 : t_1) \mapsto (t_0^3 : t_0^2 t_1 : t_0 t_1^2 : t_1^3)$. Покажите что:

а) **(10 баллов)** пучок идеалов $\mathcal{J}$ любой скрученной кубики включается в точную последовательность локально свободных пучков $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(-3)^{\oplus 2} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(-2)^{\oplus 3} \to \mathcal{J} \to 0$

б) **(10 баллов)** две скрученных кубики пересекаются тогда и только тогда, когда они лежат на одной кубической поверхности.

в) **(10 баллов)** Найдите тип расщепления[3] ограничения $i^* T_{\mathbb{P}_3}$ касательного расслоения к $\mathbb{P}_3$ на скрученную кубику C.

Задача 7 (10 баллов). Найдите $c_2(\Lambda^2 T_{\mathbb{P}_n})$ и $c_2(S^2 T_{\mathbb{P}_n})$.

---

[1] одно из возможных решений использует такое соображение: если гладкое неприводимое n-мерное аффинное многообразие $X \subset \mathbb{A}^m$ является множеством решений системы полиномиальных уравнений $f_i = 0$ и в каждой точке $p \in X$ линейные уравнения $d_p f_i = 0$ задают n-мерное пространство в $\mathbb{A}^m$, то многочлены f_i порождают идеал $I(X)$ (если Вы собираетесь воспользоваться этим соображением, то его следует доказать)

[2] т. е. группа (классов изоморфных) локально тривиальных векторных расслоений ранга 1 с операцией послойного тензорного произведения

[3] напомню, что любое расслоение E на $\mathbb{P}_1$ является прямой суммой линейных расслоений $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(d_i)$, и числа d_i, выписанные в порядке неубывания, называются *типом расщепления* расслоения E