Письменный экзамен за первый семестр (модули I, II)

вторая попытка

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Во всех задачах основное поле $\Bbbk$ предполагается алгебраически замкнутым характеристики нуль.

Задача 1 (10 баллов). Покажите, что пучок квадрик $\lambda G + \mu Q$ в $\mathbb{P}_n$ тогда и только тогда содержит ровно $(n+1)$ различных особых квадрик, когда $\operatorname{codim}_{\mathbb{P}_n}(T_pG \cap T_pQ) = 2$ в каждой точке[1] $p \in G \cap Q$.

Задача 2 (10 баллов). Задайте явными уравнениями многообразие секущих[2] $J(C_4, C_4)$ к кривой Веронезе $C_4 \subset \mathbb{P}_4 = \mathbb{P}(S^4U)$, состоящей из чистых 4-тых степеней $u^4 \in S^4U$ векторов $u \in U$, $\dim U = 2$.

Задача 3 (10 баллов). Покажите, что множество всех поверхностей 4-й степени $S \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$, на которых имеется хоть одна прямая, образует неприводимую алгебраическую гиперповерхность в пространстве $\mathbb{P}(S^4V^*)$ всех поверхностей 4-й степени.

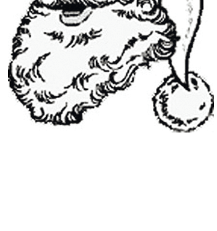
Задача 4 (10 баллов). Покажите, что множество n-мерных проективных подпространств, лежащих на гладкой $(2n+1)$-мерной квадрике в $\mathbb{P}_{2n+2}$ является неприводимым проективным многообразием и найдите его размерность.

Задача 5 (10 баллов). Для пары различных точек $a, b \in \mathbb{P}_2$ обозначим через W линейную систему[3] коник, проходящих через a и b, а через $S \subset W^\times$ — замыкание образа отображения

$$\mathbb{P}_2 \smallsetminus \{a, b\} \to W^\times\,,$$

задаваемого этой линейной системой[4]. Найдите размерности W и S, степень S и опишите пучки коник, отвечающие всем лежащим на S прямым. Верно ли, что любая гладкая поверхность степени $\deg S$ в $W^\times$ получается таким образом для подходящих a и b?

С Новым Годом!



[1] такие пересечения гиперповерхностей называются *трансверсальными*

[2] т. е. объединение всех прямых, параметризуемых замыканием в $\mathrm{Gr}(2,5)$ множества всех прямых (ab) с различными $a, b \in C_4$

[3] т. е. проективное пространство

[4] напомню, что оно сопоставляет точке $p \in \mathbb{P}_2 \smallsetminus \{a, b\}$ аннулятор гиперплоскости в W, образованной всеми кривыми $C \in W$, проходящими через p