

Линейные системы коник

Терминология и соглашения. Всюду далее основное поле \mathbb{k} по умолчанию предполагается алгебраически замкнутым характеристики нуля. Проективные подпространства в пространстве $\mathbb{P}(S^d V^*)$ гиперповерхностей степени d в $\mathbb{P}(V)$ называются *линейными системами* гиперповерхностей. Линейные системы размерностей 1, 2 и 3 называются *пучками*, *связками* и *сетями* соответственно. Пересечение всех гиперповерхностей линейной системы называется *базисным множеством* этой системы.

ГС19♦1 (сеть окружностей). Рассмотрим евклидову плоскость \mathbb{R}^2 как множество вещественных точек комплексной плоскости \mathbb{C}^2 , вложенной в $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ в качестве стандартной аффинной карты U_0 . Найдите на \mathbb{P}_2 две точки ι_{\pm} , через которые проходят все евклидовы окружности, и докажите, что каждая непустая гладкая вещественная¹ коника в \mathbb{R}^2 , проходящая в \mathbb{P}_2 через точки ι_{\pm} , является окружностью.

ГС19♦2. Верно ли, что все коники, проходящие через точки $(1 : 1 : 0)$, $(1 : 0 : 1)$, $(0 : 1 : 1)$ и точку а) $(1 : 1 : 1)$ б) $(2 : 1 : 1)$ образуют пучок? Если да, напишите явное однопараметрическое уравнение коник такого пучка, если нет, объясните, почему.

ГС19♦3. Могут ли все коники в пучке быть вырожденными? Пусть в пучке есть хоть одна гладкая коника. Может ли в нём быть ровно а) 0 б) 1 в) 2 г) 3 д) 4 вырожденные коники? Если да, приведите явный пример такого пучка, если нет, объясните, почему.

ГС19♦4. Могут ли две гладкие коники пересекаться ровно по а) 0 б) 1 в) 2 г) 3 д) 4 е) 5 точкам? Если да, приведите явные примеры таких коник, если нет, объясните, почему.

ГС19♦5. Может ли пучок коник содержать ровно одну особую конику, не являющуюся двойной прямой? Если да, напишите явное однопараметрическое уравнение коник такого пучка, если нет, объясните, почему.

ГС19♦6. Напишите явное однопараметрическое уравнение пучка коник с тремя данными базисными точками. Сколько особых коник может быть в таком пучке?

ГС19♦7. Образуют ли пучок коники, касающиеся прямых $x_0 = 0$ и $x_1 = 0$, соответственно, в точках а) $(0 : 1 : 0)$ и $(1 : 0 : 0)$ б) $(0 : 0 : 1)$ и $(1 : 0 : 0)$? Если да, напишите явное однопараметрическое уравнение коник такого пучка, если нет, объясните, почему.

ГС19♦8. Напишите уравнение коники, проходящей а) через точки $(1 : 1 : 0)$, $(1 : 0 : 1)$, $(0 : 1 : 1)$, $(1 : 1 : 1)$, $(1 : -2 : 3)$ б) через точки $(1 : 1 : 0)$, $(1 : 0 : 1)$, $(0 : 1 : 1)$ и касающейся прямой $x_0 + x_1 + x_2 = 0$ в точке $(1 : -2 : 1)$ в) через точку $(1 : 2 : 3)$ и касающейся прямых $x_0 = x_1$ и $x_1 = x_2$, соответственно, в точках $(1 : 1 : 0)$ и $(0 : 1 : 1)$. Много ли таких коник? Если одна, то гладкая ли она? Если да, то чем: эллипсом, гиперболой или параболой она изображается в стандартной аффинной карте U_0 ?

ГС19♦9*. Покажите, что особые точки гиперповерхности² $\Sigma \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2 V^*)$ особых коник в $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ суть двойные прямые и только они, и покажите, что касательное пространство³ к Σ в гладкой точке, представляющей собою распавшуюся конику $\ell_1 \cup \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$, состоит из всех коник, проходящих через точку $\ell_1 \cap \ell_2$.

ГС19♦10*. Найдите размерность линейной системы кубических кривых в \mathbb{P}_2 , проходящих через фиксированные, не лежащие на одной конике шесть точек, никакие три из которых не коллинеарны.

ГС19♦11*. Опишите эффективный способ сведения системы из двух однородных уравнений степени 2 на 3 неизвестные к одному кубическому уравнению на одну неизвестную.

¹Т. е. задаваемая квадратичной формой с вещественными коэффициентами.

²Точка p гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{P}_n$ называется *особой*, если ограничение многочлена f на любую проходящую через p прямую либо тождественно нулевое, либо имеет кратный корень в точке p .

³Касательное пространство $T_p S$ к гиперповерхности $S = V(f) \subset \mathbb{P}_n$ в точке $p \in S$ есть объединение всех проходящих через p прямых, на которые многочлен f ограничивается либо в тождественный нуль, либо в многочлен, имеющий кратный корень в точке p .