

Проективные коники

ГС18♦1. Постройте рациональную параметризацию коник¹:

- а) $3x_0^2 + 5x_1^2 + 34x_2^2 + 4x_0x_1 + 12x_0x_2 = 10x_1x_2$ (подсказка: точка $(-7 : 5 : 2)$ изотропна)
 б) $x_1^2 + 11x_2^2 + 2x_0x_2 = 10x_1x_2$ в) $2x_1^2 + 25x_2^2 + 8x_0x_2 = 2x_0x_1 + 14x_1x_2$.

ГС18♦2. Коника $C \subset \mathbb{P}_2$ имеет уравнение $x_0^2 + x_1^2 + 12x_2^2 - 2x_0x_1 + 10x_0x_2 - 8x_1x_2 = 0$. Напишите уравнение двойственной коники $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ в двойственном базисе.

ГС18♦3. Сколько общих касательных может быть у двух гладких коник?

ГС18♦4. Над полем \mathbb{C} напишите уравнения всех касательных, опущенных из точки $(1 : 1 : 1)$ на все коники из зад. ГС18♦1-2.

ГС18♦5. Покажите, что для любой неперспективной гомографии $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\simeq} \ell_2$ на \mathbb{P}_2 существует единственная гладкая коника C , такая что $y = \varphi(x)$ если и только если прямая (xy) касается C .

ГС18♦6. Каково уравнение гладкой коники C в базисе (e_0, e_1, e_2) , если треугольник $e_0e_1e_2$
 а) вписан в C б) автополярен относительно C ?

Поляритет и сопряжение относительно гладкой квадрики. Гладкая квадрика $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$ задаёт линейное биективное полярное преобразование $\bar{q} : \mathbb{P}(V) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}(V^*)$ переводящее точку $p \in \mathbb{P}(V)$ в её полярную гиперплоскость² $\mathbb{P}(p^\perp) \subset \mathbb{P}(V)$. Две точки (соотв. гиперплоскости) называются сопряжёнными относительно Q , если одна из них лежит на поляре (соотв. проходит через полюс) другой.

ГС18♦7. Опишите полярное преобразование евклидовой плоскости³ \mathbb{R}^2 относительно «мнимой окружности» $x^2 + y^2 = -1$.

ГС18♦8. Докажите, что точки a и b прямой, которая пересекает гладкую квадрику Q в отличных от a, b точках c и d , сопряжены относительно Q если и только если a и b гармоничны c и d .

ГС18♦9 (двойное отношение точек на конике). Двойным отношением $[a, b, c, d]_C$ четырёх различных точек гладкой коники C называется двойное отношение прямых $[(pa), (pb), (pc), (pd)]$ из пучка с центром в какой-либо пятой точке $p \in C$. Покажите, что оно не зависит от выбора точки p , и что две хорды коники C тогда и только тогда сопряжены относительно C , когда их концы гармоничны на C .

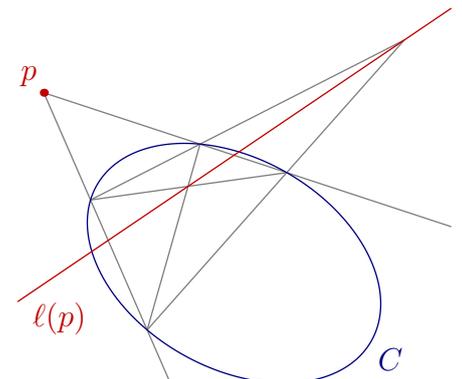


Рис. 1♦1.

ГС18♦10 (построение Штейнера). Обоснуйте показанное на рис. 1♦1 построение одной линейкой поляры $\ell(p)$ данной точки p относительно данной коники C .

ГС18♦11. Одной линейкой постройте полярю данной точки и полюс данной прямой при полярном преобразовании евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 относительно данной окружности в случае, когда прямая не пересекает окружности, а точка лежит внутри очерчиваемого окружностью круга.

ГС18♦12. Назовём гомографией на гладкой конике C любую сохраняющую двойное отношение биекцию $\gamma : C \xrightarrow{\simeq} C$. Покажите, что если γ не является инволюцией, то ГМТ пересечения прямых $(x\gamma(y)) \cap (y\gamma(x))$, где $x \neq y$ независимо пробегают C , это прямая, пересекающая конику C в точности по неподвижным точкам гомографии γ . Одной линейкой постройте неподвижные точки гомографии $C \xrightarrow{\simeq} C$, если задано её действие на 3 разные точки.

¹Ср. с контрольной работой № 5

²Или полярю. Точка p называется полюсом гиперплоскости $\mathbb{P}(p^\perp)$.

³Вложенной в $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ в виде стандартной карты U_0