

### Билинейные формы

**Обозначения.** Мы рассматриваем конечномерное векторное пространство  $V$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$ , оснащённое билинейной формой  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ . Значение  $\beta(u, w) \in \mathbb{k}$  на векторах  $u, w \in V$  иногда удобно записывать в виде произведения<sup>1</sup>  $u \cdot w$ . Для двух наборов векторов  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  и  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ , где  $u_i, w_j \in V$ , матрица  $B_{\mathbf{u}\mathbf{w}} = \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{w} \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{k})$  с элементами  $b_{ij} = v_i \cdot w_j = \beta(u_i, w_j)$  называется *матрицей Грама* этих наборов и формы  $\beta$ . Если наборы совпадают:  $\mathbf{u} = \mathbf{w}$ , мы пишем просто  $B_{\mathbf{u}}$  вместо  $B_{\mathbf{u}\mathbf{u}}$ . В этом случае  $\det B_{\mathbf{u}} \in \mathbb{k}$  называется *определителем Грама* формы  $\beta$  и набора векторов  $\mathbf{u}$ . Форма называется *невыврожденной*, если  $\det B_{\mathbf{e}} \neq 0$  для какого-нибудь базиса  $\mathbf{e}$  в  $V$ .

**ГС13♦1.** Пусть наборы векторов  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  и  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$  линейно выражаются через наборы векторов  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_k)$  и  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_\ell)$  по формулам  $\mathbf{u} = \mathbf{r} C_{\mathbf{r}\mathbf{u}}$  и  $\mathbf{w} = \mathbf{s} C_{\mathbf{s}\mathbf{w}}$ , где  $C_{\mathbf{r}\mathbf{u}} \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{k})$ ,  $C_{\mathbf{s}\mathbf{w}} \in \text{Mat}_{\ell \times m}(\mathbb{k})$ . Выразите матрицу Грама  $B_{\mathbf{u}\mathbf{w}}$  через матрицу Грама  $B_{\mathbf{r}\mathbf{s}}$  и матрицы  $C_{\mathbf{r}\mathbf{u}}$ ,  $C_{\mathbf{s}\mathbf{w}}$ .

**ГС13♦2.** Покажите, что определитель Грама линейно зависимого набора векторов нулевой.

**ГС13♦3.** Зафиксируем в пространствах  $V$  и  $V^*$  двойственные базисы  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  и  $\mathbf{e}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ . Сопоставим билинейной форме  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  линейные операторы *левой* и *правой корреляции*  $\wedge\beta, \beta^\wedge : V \rightarrow V^*$ , переводящие вектор  $v \in V$  в линейные функции

$$\wedge\beta(v) : V \rightarrow \mathbb{k}, \quad u \mapsto \beta(v, u), \quad \text{и} \quad \beta^\wedge(v) : V \rightarrow \mathbb{k}, \quad u \mapsto \beta(u, v).$$

Выразите матрицы этих операторов в базисах  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e}^*$  через матрицу Грама  $B_{\mathbf{e}}$ .

**ГС13♦4.** Для любой билинейной формы  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  покажите, что а)  $\dim \ker \wedge\beta = \dim \ker \beta^\wedge$  б) матрицы Грама всех базисов пространства  $V$  имеют одинаковый ранг.

**ГС13♦5.** Приведите пример формы, у которой  $\ker \wedge\beta \neq \ker \beta^\wedge$ .

**ГС13♦6.** Покажите, что у любого базиса  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  в пространстве  $V$  с невырожденной билинейной формой  $\beta$  имеются левый и правый *двойственные базисы*  ${}^\vee\mathbf{e} = ({}^\vee e_1, \dots, {}^\vee e_n)$  и  $\mathbf{e}^\vee = (e_1^\vee, \dots, e_n^\vee)$ , однозначно определяемые тем, что  $\beta({}^\vee e_i, e_j) = \beta(e_i, e_j^\vee) = \delta_{ij}$ , и выразите матрицы  $C_{\mathbf{e}^\vee \mathbf{e}}$  и  $C_{\mathbf{e} \mathbf{e}^\vee}$ , по столбцам которых стоят координаты векторов  ${}^\vee e_j$  и  $e_j^\vee$  в базисе  $\mathbf{e}$ , через матрицу Грама  $B_{\mathbf{e}}$ . Убедитесь, что любой вектор  $v \in V$  выражается через базис  $\mathbf{e}$  по формулам  $v = \sum_i \beta({}^\vee e_i, v) e_i = \sum_j \beta(v, e_j^\vee) e_j$ .

**ГС13♦7.** Вырождено ли ограничение билинейной формы  $\beta$  на  $\mathbb{Q}^4$  с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ -1 & 3 & -8 & 8 \\ 2 & -5 & 8 & -10 \end{pmatrix}$$

на пространство  $U$  решений системы  $\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$ ? Если нет, то найдите проекцию вектора  $v = (6, -11, -9, 9)$  на  $U$  вдоль  $U^\perp = \{w \in \mathbb{Q}^4 \mid \forall u \in U \beta(u, w) = 0\}$ .

**ГС13♦8.** Покажите, что при  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  каждая билинейная форма однозначно представляется в виде суммы симметричной и кососимметричной билинейных форм. Приведите пример невырожденной билинейной формы, у которой оба слагаемых в этой сумме вырождены. Найдите размерности векторных пространств симметричных и кососимметричных билинейных форм на  $n$ -мерном пространстве  $V$ .

**ГС13♦9.** Пусть для любых двух векторов  $u, w \in V$  равенства  $\beta(u, w) = 0$  и  $\beta(w, u) = 0$  равносильны друг другу. Покажите, что форма  $\beta$  симметрична или кососимметрична.

**ГС13♦10.** Рассмотрим на пространстве  $V = \mathbb{Q}[x]_{\leq n}$  многочленов степени  $\leq n$  с рациональными коэффициентами функцию  $\beta(f, g)$ , значение которой на многочленах  $f, g \in V$  равно

<sup>1</sup>Принимающего значения в поле  $\mathbb{k}$  (т. е. *скалярного*) и, вообще говоря, некоммутативного.

свободному члену многочлена<sup>2</sup>  $f(d/dx)g$ . Является ли она билинейной формой? Если да, то напишите её матрицу Грама в стандартном базисе из мономов и выясните, вырождена ли она? Симметрична ли?

**ГС13♦11.** Существует ли на нечётномерном пространстве невырожденная кососимметричная форма? Покажите, что ранг любой кососимметричной формы чётен.

**ГС13♦12 (кососимметричность в характеристике 2).** Покажите, что над полем  $\mathbb{k}$  любой характеристики равенство  $\beta(v, v) = 0$  для всех  $v \in V$  влечёт равенство  $\beta(u, w) = -\beta(w, u)$  для всех  $u, w \in V$ , а обратная импликация имеет место только при  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ .

---

<sup>2</sup>В первый многочлен вместо  $x$  подставили оператор дифференцирования  $\frac{d}{dx}$  и применили полученный дифференциальный оператор ко второму многочлену.