

Векторные пространства

- ГС4♦1.** При каких $t \in \mathbb{Q}$ векторы $(1, 2, 3)$, $(2, 5, 7)$ и $(3, 7, 10 + t)$ образуют базис в \mathbb{Q}^3 ?
- ГС4♦2.** Векторы v_1, v_2, v_3 линейно независимы. Для каких чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ векторы $v_1 + \lambda_2 v_2, v_2 + \lambda_3 v_3, v_3 + \lambda_1 v_1$ линейно зависимы?
- ГС4♦3.** Является ли векторным пространством над \mathbb{R} множество
- а) всех вещественных последовательностей¹ $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 - б) ограниченных сверху вещественных последовательностей $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 - в) приведённых² многочленов в $\mathbb{R}[x]$
 - г) $\{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f \leq m \ \& \ x^m f(1/x) = f(x)\}$?
- ГС4♦4.** Укажите базис и найдите размерность векторного пространства
- а) однородных многочленов степени d от m переменных
 - б) всех многочленов степени $\leq d$ от m переменных.
 - в) симметричных³ многочленов степени ≤ 6 от x, y, z .
- ГС4♦5.** Какова размерность вещественного пространства многочленов $f \in \mathbb{R}[x]$ степени $\leq n$, обращающихся в нуль в точке $(3 - 2i) \in \mathbb{C}$?
- ГС4♦6.** Являются ли вещественные числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ и $\sqrt{6}$ линейно независимыми над \mathbb{Q} ?
- ГС4♦7.** Являются ли вещественные функции $e^x, e^{2x}, \dots, e^{nx}$ линейно независимыми над \mathbb{R} ?
- ГС4♦8.** Образуют ли базис в пространстве $\mathbb{Q}[x]_{\leq n}$ многочленов степени $\leq n$ с рациональными коэффициентами многочлены а) $\binom{x+k}{k} = (x+1) \cdots (x+k)/k!$ б*) $(x-k)^n$ с $0 \leq k \leq n$.
- ГС4♦9 (пространство подмножеств).** Обозначим через $\mathcal{S}(M)$ множество всех подмножеств данного множества M . Покажите, что $\mathcal{S}(M)$ является векторным пространством над полем \mathbb{F}_2 относительно операций $X + Y \stackrel{\text{def}}{=} (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$, $1 \cdot X \stackrel{\text{def}}{=} X$, и $0 \cdot X \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$. Для m -элементного множества M найдите $\dim \mathcal{S}(M)$ и укажите в $\mathcal{S}(M)$ какой-нибудь базис.
- ГС4♦10.** Покажите, что объединение двух векторных подпространств является векторным пространством только если одно из подпространств содержится в другом.
- ГС4♦11.** Пусть $\dim(U + W) = \dim(U \cap W) + 1$ для векторных подпространств $U, W \subset V$. Обязательно ли $U + W$ равно одному из подпространств U, W , а $U \cap W$ — другому?
- ГС4♦12.** Докажите для любых линейных операторов $F, G : V \rightarrow V$ на произвольном векторном пространстве V включения а) $\ker(FG) \supset \ker(G)$ б) $\text{im}(FG) \subset \text{im}(F)$ и приведите конечномерные примеры, где оба эти включения строгие.
- ГС4♦13.** Докажите для любого линейного оператора $F : V \rightarrow V$ на конечномерном векторном пространстве V импликации: а) $\ker(F^k) = \ker(F^{k+1}) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ker(F^k) = \ker(F^{k+n})$ б) $\text{im}(F^k) = \text{im}(F^{k+1}) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \text{im}(F^k) = \text{im}(F^{k+n})$.
- ГС4♦14 (четырёхмерный куб).** Фигура $I^4 \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \forall i \ |x_i| \leq 1\}$ называется *стандартным четырёхмерным кубом*. Нарисуйте какую-нибудь двумерную параллельную проекцию четырёхмерного куба, у которой все вершины различны. Сколько у четырёхмерного куба вершин, рёбер, двумерных и трёхмерных граней? Нарисуйте развёртку трёхмерной поверхности⁴ четырёхмерного куба и напишите инструкцию по склейке⁵ из неё четырёхмерного куба. В скольких кубиках побываешь, когда гуляешь по трёхмерной поверхности четырёхмерного куба так, что выходишь из каждого кубика сквозь двумерную грань а) противоположную б) соседнюю слева к той, сквозь которую вошёл?

¹Сложение последовательностей и умножение их на константы происходит поэлементно.

²Т. е. со старшим коэффициентом 1.

³Т. е. не меняющихся при перестановках переменных: $f(x, y, z) = f(y, z, x) = f(y, x, z)$.

⁴Она представляет собою трёхмерный многогранник, собранный из обычных трёхмерных кубиков.

⁵Укажите, какие пары двумерных граней трёхмерных кубов надлежит склеить друг с другом и как именно.