

## Коника

- ГЛ13♦1.** Совпадает ли гладкая коника  $C$ , проходящая через точки  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ , никакие три из которых не коллинеарны, с ГМТ  $p$ , для которых двойное отношение прямых  $(pp_1), (pp_2), (pp_3), (pp_4)$  в пучке  $p^\times$ , равно двойному отношению прямых  $(p_5p_1), (p_5p_2), (p_5p_3), (p_5p_4)$  в пучке  $p_5^\times$ ?
- ГЛ13♦2.** Коника  $C$  пробегает простой пучок  $L$  с четырьмя базисными точками  $b_1, b_2, b_3, b_4$  и тремя особыми кониками  $S_1, S_2, S_3$ . Как связаны двойные отношения  $[S_1, S_2, S_3, C]$  на  $L$  и  $[b_1, b_2, b_3, b_4]$  на  $C$ ?
- ГЛ13♦3.** Покажите, что все хорды гладкой коники  $C$  на евклидовой плоскости, видимые из данной точки  $p \in C$  под прямым углом, пересекаются в одной точке  $q$ , причём прямая  $(pq)$  перпендикулярна касательной  $T_p C$ .
- ГЛ13♦4.** На вещественной аффинной плоскости заданы точки  $p_1, p_2, p_3, p_4$ , расположенные в вершинах выпуклого четырёхугольника. Укажите явное условие на точку  $p_5$ , необходимое и достаточное для того, чтобы через точки  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$  проходил эллипс.
- ГЛ13♦5.** Покажите, что точки, симметричные фокусу параболы относительно всевозможных касательных, лежат на её директрисе.
- ГЛ13♦6.** Покажите, что фокус параболы, касающейся прямых  $(ab), (bc), (ca)$ , лежит на описанной около  $\triangle abc$  окружности.
- ГЛ13♦7.** Может ли окружность, центр которой не лежит на оси параболы, соприкоснуться<sup>1</sup> с этой параболой в двух различных вещественных точках?
- ГЛ13♦8.** Две гладкие коники на евклидовой плоскости касаются друг друга в двух разных точках, и их общие касательные в этих точках пересекаются в точке  $p$ . Докажите, что прямая, соединяющая фокус одной из коник с точкой  $p$ , делит пополам угол между касательными, опущенными из этого фокуса<sup>2</sup> на другую конику.
- ГЛ13♦9.** Точка  $p$  лежит на одной из главных осей семейства конфокальных<sup>3</sup> центральных коник на евклидовой плоскости. Покажите, что ГМТ касания с кониками этого семейства всевозможных касательных, опущенных на них из  $p$ , это окружность, проходящая через фокусы, лежащие на другой главной оси.
- ГЛ13♦10\*** (директор коники). Покажите, что ГМТ, из которых гладкая центральная коника  $C$  видна под прямым углом, это концентричная с  $C$  окружность<sup>4</sup>.
- ГЛ13♦11\*** (гипербола Аполлония). Опишите ГМТ пересечений вращающегося диаметра данной коники с перпендикуляром, опущенным из данной точки на сопряжённый диаметр.
- ГЛ13♦12\*.** Сколько перпендикуляров можно опустить из данной точки на данную конику?

<sup>1</sup>Т. е. пересекаться и иметь в точке пересечения общую касательную.

<sup>2</sup>Всякий раз, когда такие касательные можно провести.

<sup>3</sup>Т. е. имеющих общие фокусы.

<sup>4</sup>Она называется *директором* коники  $C$ .