

Коника

- ГЛ13♦1.** Совпадает ли гладкая коника C , проходящая через точки p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 , никакие три из которых не коллинеарны, с ГМТ p , для которых двойное отношение прямых $(pp_1), (pp_2), (pp_3), (pp_4)$ в пучке p^\times , равно двойному отношению прямых $(p_5p_1), (p_5p_2), (p_5p_3), (p_5p_4)$ в пучке p_5^\times ?
- ГЛ13♦2.** Коника C пробегает простой пучок L с четырьмя базисными точками b_1, b_2, b_3, b_4 и тремя особыми кониками S_1, S_2, S_3 . Как связаны двойные отношения $[S_1, S_2, S_3, C]$ на L и $[b_1, b_2, b_3, b_4]$ на C ?
- ГЛ13♦3.** Покажите, что все хорды гладкой коники C на евклидовой плоскости, видимые из данной точки $p \in C$ под прямым углом, пересекаются в одной точке q , причём прямая (pq) перпендикулярна касательной $T_p C$.
- ГЛ13♦4.** На вещественной аффинной плоскости заданы точки p_1, p_2, p_3, p_4 , расположенные в вершинах выпуклого четырёхугольника. Укажите явное условие на точку p_5 , необходимое и достаточное для того, чтобы через точки p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 проходил эллипс.
- ГЛ13♦5.** Покажите, что точки, симметричные фокусу параболы относительно всевозможных касательных, лежат на её директрисе.
- ГЛ13♦6.** Покажите, что фокус параболы, касающейся прямых $(ab), (bc), (ca)$, лежит на описанной около $\triangle abc$ окружности.
- ГЛ13♦7.** Может ли окружность, центр которой не лежит на оси параболы, соприкоснуться¹ с этой параболой в двух различных вещественных точках?
- ГЛ13♦8.** Две гладкие коники на евклидовой плоскости касаются друг друга в двух разных точках, и их общие касательные в этих точках пересекаются в точке p . Докажите, что прямая, соединяющая фокус одной из коник с точкой p , делит пополам угол между касательными, опущенными из этого фокуса² на другую конику.
- ГЛ13♦9.** Точка p лежит на одной из главных осей семейства конфокальных³ центральных коник на евклидовой плоскости. Покажите, что ГМТ касания с кониками этого семейства всевозможных касательных, опущенных на них из p , это окружность, проходящая через фокусы, лежащие на другой главной оси.
- ГЛ13♦10*** (директор коники). Покажите, что ГМТ, из которых гладкая центральная коника C видна под прямым углом, это концентричная с C окружность⁴.
- ГЛ13♦11*** (гипербола Аполлония). Опишите ГМТ пересечений вращающегося диаметра данной коники с перпендикуляром, опущенным из данной точки на сопряжённый диаметр.
- ГЛ13♦12*.** Сколько перпендикуляров можно опустить из данной точки на данную конику?

¹Т. е. пересекаться и иметь в точке пересечения общую касательную.

²Всякий раз, когда такие касательные можно провести.

³Т. е. имеющих общие фокусы.

⁴Она называется *директором* коники C .