Проективная геометрия

ГЛ11⋄1. Подмножество $\Phi \subset \mathbb{P}_n(\Bbbk)$ таково, что в каждой аффинной карте, с которой оно пересекается, его видно как k-мерное аффинное подпространство. Верно ли, что $\Phi = \mathbb{P}(W)$ для некоторого $(k+1)$-мерного векторного подпространства $W \subset \Bbbk^{n+1}$ **а)** если поле $\Bbbk \neq \mathbb{F}_2$ **б*)** если $\Bbbk = \mathbb{F}_2$? Всегда ли есть аффинная карта, где Φ вообще не видно?

ГЛ11⋄2. Найдите порядки групп $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$ и $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$, где $\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов.

ГЛ11⋄3 (теорема Паппа). Пусть на $\mathbb{P}_2$ точки a_1, b_1, c_1 коллинеарны и точки a_2, b_2, c_2 коллинеарны. Докажите, что три точки пресечений прямых $(a_1 b_2) \cap (a_2 b_1)$, $(b_1 c_2) \cap (b_2 c_1)$, $(c_1 a_2) \cap (c_2 a_1)$ тоже коллинеарны.

ГЛ11⋄4. Сформулируйте и докажите двойственное утверждение к теореме Паппа.

ГЛ11⋄5. На доске указаны две точки. При помощи линейки, которая короче расстояния между ними, проведите через эти точки прямую.

ГЛ11⋄6. На листе бумаги нарисованы точка A и две прямые, пересекающиеся в точке B вне листа. При помощи одной линейки нарисуйте на листе прямую AB.

ГЛ11⋄7 (первая теорема Дезарга). Покажите, что три точки пересечения пар соответственных[1] сторон треугольников $A_1 B_1 C_1$ и $A_2 B_2 C_2$ на $\mathbb{P}_2$ коллинеарны если и только если три прямые, проходящие через пары соответственных вершин, пересекаются в одной точке[2].

ГЛ11⋄8 (вторая теорема Дезарга). Три различные точки $p, q, r \in \mathbb{P}_2$ лежат на прямой ℓ, а три различные точки a, b, c — вне неё. Докажите, что инволюция $\sigma : \ell \xrightarrow{\sim} \ell$, переводящая точки p, q, r в точки пересечения прямой ℓ с прямыми (bc), (ca), (ab), существует если и только если прямые (ap), (bq), (cr) пересекаются в одной точке.

ГЛ11⋄9. Треугольники $\triangle\, a_1 b_1 c_1$ и $\triangle\, a_2 b_2 c_2$ на $\mathbb{P}_2$ вписаны в одну и ту же гладкую конику. Перспективен ли треугольник со сторонами $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$, $(c_1 c_2)$ треугольнику с вершинами $(a_1 b_1) \cap (a_2 b_2)$, $(b_1 c_1) \cap (b_2 c_2)$, $(c_1 a_1) \cap (c_2 a_2)$?

ГЛ11⋄10. Покажите, что два треугольника на $\mathbb{P}_2$ перспективны если и только если они полярны друг другу относительно некоторой гладкой коники.

ГЛ11⋄11* (нормальные рациональные кривые). Пусть $\operatorname{char} \Bbbk = 0$. Зафиксируем линейно независимые однородные многочлены n-й степени $f_0, f_1, \dots, f_n \in \Bbbk[x_0, x_1]$ и попарно различные точки $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}_1$. Покажите, что образы трёх отображений $\mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_n$, посылающих точку $a = (\alpha_0 : \alpha_1) \in \mathbb{P}_1$ соответственно в точки с однородными координатами **а)** $\big(f_0(a) : \dots : f_n(a)\big)$ **б)** $\big(\det^{-1}(p_0, a) : \dots : \det^{-1}(p_n, a)\big)$, где $\det(b, a) \overset{\text{def}}{=} \beta_0 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_0$ для $b = (\beta_0 : \beta_1)$, **в)** $(a_0 : a_1 : \dots : a_n)$, где $a_i \in \Bbbk$ суть коэффициенты многочлена $(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1)^n$, переводятся друг в друга проективными преобразованиями $\mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n$.

ГЛ11⋄12*. Фиксируем $n+3$ точки $p_1, \dots, p_n$, a, b, $c \in \mathbb{P}_n$ так, чтобы никакие $n+1$ из них не лежали в одной гиперплоскости. Обозначим через $\ell_i \simeq \mathbb{P}_1$ пучок гиперплоскостей, проходящих через все точки p_ν с $\nu \neq i$, а через $\psi_{ij} : \ell_j \xrightarrow{\sim} \ell_i$ — гомографию, переводящую три проходящие через точки a, b, c гиперплоскости из пучка ℓ_j в аналогичные три гиперплоскости из пучка ℓ_i. Покажите что $\bigcup_{H \in \ell_1} H \cap \psi_{21}(H) \cap \dots \cap \psi_{n1}(H)$ это нормальная рациональная кривая. Если общий случай труден, рассмотрите $n = 2, 3$.

ГЛ11⋄13*. Покажите, что через каждые $n+3$ точки в $\mathbb{P}_n$, никакие $n+1$ из которых не лежат в одной гиперплоскости, можно провести единственную нормальную рациональную кривую. Если общий случай труден, рассмотрите $n = 2, 3$.

[1] Т. е. поименованных одинаковыми буквами.

[2] Треугольники, обладающие этими свойствами, называются *перспективными*.