Правильные многогранники (по Шлефли)

Терминология и обозначения. *Группой многогранника* $M \subset \mathbb{R}^n$ называется группа всех биективных отображений $M \rightleftarrows M$, которые являются ограничениями на M ортогональных преобразований $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Всякая последовательность длины n, состоящая из вершины, примыкающего к ней ребра, примыкающей к нему двумерной грани, …, примыкающей к ней $(n-1)$-мерной грани, называется *флагом* в M. Многогранник называется *правильным*, если его группа транзитивно действует на его флагах. Для правильного многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $\ell(P)$ длину его ребра, через $r(P)$ — радиус описанного шара, через $\varrho(P) = \ell^2/4r^2$ — квадрат отношения длины ребра к диаметру описанного шара.

ГЛ9½◇1 (звезда). Покажите, что все вершины правильного многогранника P, соединённые ребром с заданной вершиной $p \in P$, лежат в одной гиперплоскости, образуя в ней правильный многогранник $\mathrm{St}(P)$ на единицу меньшей размерности, чем P (он называется *звездой* многогранника P).

ГЛ9½◇2 (символ). Определим по индукции *символ Шлефли* правильного многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ как последовательность $\boldsymbol{\nu}(P) = \big(\nu_1(P), \nu_2(P), \dots, \nu_{n-1}(P)\big)$ из $n-1$ натуральных чисел, хвост которой $\big(\nu_2(P), \dots, \nu_{n-1}(P)\big) = \boldsymbol{\nu}\big(\mathrm{St}(P)\big)$ является символом звезды $\mathrm{St}(P)$, а первое число $\nu_1(P)$ равно количеству рёбер у двумерной грани многогранника P. Найдите символы: **а)** додекаэдра и икосаэдра в $\mathbb{R}^3$ **б)** октаплекса[1] в $\mathbb{R}^4$ **в)** правильного n-мерного симплекса **г)** n-мерного куба **д)** n-мерного кокуба.

ГЛ9½◇3*. Убедитесь, что выпуклая оболочка вершин стандартного четырёхмерного куба $I_4 = \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \forall\, i\ |x_i| \leqslant 1\}$, точек пересечения его описанной сферы с прямыми, соединяющими центры его противоположных трёхмерных граней, и всех точек, которые получаются чётными перестановками координат из точек $(\pm\chi, \pm1, \pm\chi^{-1}, 0)$, где золотое сечение $\chi = (1+\sqrt{5})/2$, является правильным многогранником с символом $(3, 3, 5)$.

ГЛ9½◇4. Выразите $\ell(\mathrm{St}(P))$ через $\ell(P)$ и $\nu_1(P)$, и покажите, что $\varrho(P) = 1 - \cos^2\big(\pi/\nu_1(P)\big)/\varrho\big(\mathrm{St}(P)\big)$ зависит только от символа $\boldsymbol{\nu}(P)$ многогранника P.

ГЛ9½◇5 (двойственность). Покажите, что для правильного многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ с центром в нуле многогранник $P^* = \{\xi \in \mathbb{R}^{n*} \mid \forall\, v \in P\ \xi(v) \geqslant -1\}$ тоже правильный с центром в нуле, и для каждого k имеется оборачивающая включения биекция между k-мерными гранями многогранника P и $(n-k-1)$-мерными гранями многогранника P^*.

ГЛ9½◇6. Покажите, что символ $\boldsymbol{\nu}\left(P^*\right)$ это прочтённый справа налево символ $\boldsymbol{\nu}(P)$.

ГЛ9½◇7 (классификация правильных многогранников по Шлефли). Покажите, что

а) символы всех правильных многогранников $P \subset \mathbb{R}^n$ содержится в списке:

- (ν), где $\nu \geqslant 3$ — любое натуральное, при $n = 2$
- $(3,3)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(3,5)$, $(5,3)$ при $n = 3$
- $(3,3,3)$, $(3,3,4)$, $(4,3,3)$, $(3,4,3)$, $(3,3,5)$, $(5,3,3)$ при $n = 4$
- $(3, \dots, 3)$, $(3, \dots, 3, 4)$, $(4, 3, \dots, 3)$ при $n \geqslant 5$

б*) для каждого элемента списка имеется единственный с точностью до подобия правильный многогранник с таким символом.

ГЛ9½◇8. Постройте изоморфизм **а)** группы правильного n-мерного симплекса с симметрической группой S_{n+1} **б)** собственной группы трёхмерного куба с группой перестановок S_4.

ГЛ9½◇9. Подсчитайте количество движений в группе n-мерного куба.

ГЛ9½◇10*. Сколько движений в группах 4-мерных правильных многогранников с символами $(3,4,3)$, $(3,3,5)$ и $(5,3,3)$? Попытайтесь явно перечислить все эти движения.

[1] См. задачу ГЛ7 ◇ 5* из листка № 7.