

## Линейные отображения евклидовых пространств

В этом листке  $V$  по умолчанию обозначает  $n$ -мерное евклидово векторное пространство  $\mathbb{R}^n$ .

**ГЛ8♦1.** Пусть  $V = U \oplus W$ , где сумма не предполагается ортогональной, и  $\pi : V \rightarrow V$  — проекция на  $W$  вдоль  $U$ . Верно ли, что  $V = U^\perp \oplus W^\perp$ ? Опишите ядро, образ и действие евклидово сопряжённого к  $\pi$  оператора  $\pi^\times : V \rightarrow V$ .

**ГЛ8♦2.** Пусть  $V = \mathbb{R}^3$ . Введём на пространстве  $S^m V^*$  однородных многочленов степени  $m$  от стандартных координат  $(x, y, z)$  на  $V$  евклидову структуру, в которой все мономы  $x^\alpha y^\beta z^\gamma$  ортогональны друг другу и имеют скалярные квадраты  $\alpha! \beta! \gamma!$ .

а) Опишите линейный оператор  $\Delta^\times : S^{m-2} V^* \rightarrow S^m V^*$ , евклидово сопряжённый к оператору Лапласа  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} : S^m V^* \rightarrow S^{m-2} V^*$ .

б\*) Покажите, что  $S^m V^* = H_m \oplus g H_{m-2} \oplus g^2 H_{m-4} \oplus \dots$ , где  $H_m = \{f \in S^m V^* \mid \Delta f = 0\}$  обозначает подпространство гармонических многочленов, а  $g \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 + z^2 \in S^2 V^*$  — квадрат евклидовой длины на  $V$ .

**ГЛ8♦3.** Пусть  $f : V \rightarrow V$  самосопряжённый линейный оператор с собственными значениями  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ . Для подпространства  $U \subset V$  с ортонормальным базисом  $u_1, \dots, u_r$  положим  $R_U(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^r (u_i, f u_i)$ .

а) Зависит ли  $R_U(f)$  от выбора ортонормального базиса в  $U$ ?

б) Найдите  $\max_U R_U(f)$  по всем  $r$ -мерным подпространствам  $U \subset V$  в предположении, что все собственные числа оператора  $f$  попарно различны.

**ГЛ8♦4.** В условиях предыдущей задачи обозначим через  $m_U(f)$  и  $M_U(f)$  минимальное и максимальное значения квадратичной формы  $q_f(u) \stackrel{\text{def}}{=} (u, f u)$  на единичной сфере  $S^{r-1} \subset U$ . Докажите, что

а) (принцип минимакса)  $\max_U m_U(f) = \alpha_r = \min_W M_W(f)$ , где максимум и минимум берутся, соответственно, по всем  $r$ -мерным подпространствам  $U \subset V$  и всем  $(n+1-r)$ -мерным подпространствам  $W \subset V$

б) для любой гиперплоскости  $H \subset V$  существует единственный такой самосопряжённый оператор  $h : H \rightarrow H$ , что  $q_f(u) = (u, h u)$  для всех  $u \in H$

в\*) собственные числа  $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_{n-1}$  оператора  $h : H \rightarrow H$  из предыдущего пункта удовлетворяют неравенствам  $\alpha_1 \geq \beta_1 \geq \alpha_2 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \alpha_{n-1} \geq \beta_{n-1} \geq \alpha_n$ .

**ГЛ8♦5 (нормальные операторы).** Покажите, что следующие свойства линейного оператора  $f : V \rightarrow V$  на евклидовом пространстве  $V$  эквивалентны:

а)  $f f^\times = f^\times f$

б)  $\forall v \in V \ |f(v)| = |f^\times(v)|$

в) компоненты (единственного) разложения  $f = f_+ + f_-$  в сумму самосопряжённого и антисамосопряжённого операторов перестановочны.

**ГЛ8♦6.** Пусть линейный оператор  $f : V \rightarrow V$  нормален. Докажите для каждого собственного подпространства  $V_\lambda \subset V$  оператора  $f$  включения  $f^\times(V_\lambda) \subset V_\lambda$  и  $f(V_\lambda^\perp) \subset V_\lambda^\perp$ .

**ГЛ8♦7\*.** Покажите, что невырожденный оператор  $f \in \text{GL}(V)$  нормален если и только если ортогональная компонента  $g \in \text{O}(V)$  и положительная самосопряжённая компонента  $h$  его полярного разложения  $f = gh$  перестановочны.