

Линейные отображения евклидовых пространств

В этом листке V по умолчанию обозначает n -мерное евклидово векторное пространство \mathbb{R}^n .

ГЛ8♦1. Пусть $V = U \oplus W$, где сумма не предполагается ортогональной, и $\pi : V \rightarrow V$ — проекция на W вдоль U . Верно ли, что $V = U^\perp \oplus W^\perp$? Опишите ядро, образ и действие евклидово сопряжённого к π оператора $\pi^\times : V \rightarrow V$.

ГЛ8♦2. Пусть $V = \mathbb{R}^3$. Введём на пространстве $S^m V^*$ однородных многочленов степени m от стандартных координат (x, y, z) на V евклидову структуру, в которой все мономы $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ ортогональны друг другу и имеют скалярные квадраты $\alpha! \beta! \gamma!$.

а) Опишите линейный оператор $\Delta^\times : S^{m-2} V^* \rightarrow S^m V^*$, евклидово сопряжённый к оператору Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} : S^m V^* \rightarrow S^{m-2} V^*$.

б*) Покажите, что $S^m V^* = H_m \oplus g H_{m-2} \oplus g^2 H_{m-4} \oplus \dots$, где $H_m = \{f \in S^m V^* \mid \Delta f = 0\}$ обозначает подпространство гармонических многочленов, а $g \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 + z^2 \in S^2 V^*$ — квадрат евклидовой длины на V .

ГЛ8♦3. Пусть $f : V \rightarrow V$ самосопряжённый линейный оператор с собственными значениями $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$. Для подпространства $U \subset V$ с ортонормальным базисом u_1, \dots, u_r положим $R_U(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^r (u_i, f u_i)$.

а) Зависит ли $R_U(f)$ от выбора ортонормального базиса в U ?

б) Найдите $\max_U R_U(f)$ по всем r -мерным подпространствам $U \subset V$ в предположении, что все собственные числа оператора f попарно различны.

ГЛ8♦4. В условиях предыдущей задачи обозначим через $m_U(f)$ и $M_U(f)$ минимальное и максимальное значения квадратичной формы $q_f(u) \stackrel{\text{def}}{=} (u, f u)$ на единичной сфере $S^{r-1} \subset U$. Докажите, что

а) (принцип минимакса) $\max_U m_U(f) = \alpha_r = \min_W M_W(f)$, где максимум и минимум берутся, соответственно, по всем r -мерным подпространствам $U \subset V$ и всем $(n+1-r)$ -мерным подпространствам $W \subset V$

б) для любой гиперплоскости $H \subset V$ существует единственный такой самосопряжённый оператор $h : H \rightarrow H$, что $q_f(u) = (u, h u)$ для всех $u \in H$

в*) собственные числа $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_{n-1}$ оператора $h : H \rightarrow H$ из предыдущего пункта удовлетворяют неравенствам $\alpha_1 \geq \beta_1 \geq \alpha_2 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \alpha_{n-1} \geq \beta_{n-1} \geq \alpha_n$.

ГЛ8♦5 (нормальные операторы). Покажите, что следующие свойства линейного оператора $f : V \rightarrow V$ на евклидовом пространстве V эквивалентны:

а) $f f^\times = f^\times f$

б) $\forall v \in V \ |f(v)| = |f^\times(v)|$

в) компоненты (единственного) разложения $f = f_+ + f_-$ в сумму самосопряжённого и антисамосопряжённого операторов перестановочны.

ГЛ8♦6. Пусть линейный оператор $f : V \rightarrow V$ нормален. Докажите для каждого собственного подпространства $V_\lambda \subset V$ оператора f включения $f^\times(V_\lambda) \subset V_\lambda$ и $f(V_\lambda^\perp) \subset V_\lambda^\perp$.

ГЛ8♦7*. Покажите, что невырожденный оператор $f \in \text{GL}(V)$ нормален если и только если ортогональная компонента $g \in \text{O}(V)$ и положительная самосопряжённая компонента h его полярного разложения $f = gh$ перестановочны.