Грассмановы многочлены и определители

ГЛ5⋄1. Две строки 3×3-матрицы заполнены целыми числами так, что строки не пропорциональны над $\mathbb{Q}$ и нод каждой из них равен единице. Всегда ли можно заполнить третью строку целыми числами так, чтобы определитель оказался единичным?

ГЛ5⋄2. Двое по очереди заполняют целыми числами клетки матрицы 3×3. Первый выигрывает, если в результате получится вырожденная матрица. Кто победит?

ГЛ5⋄3. Сколько $n\times n$ матриц определителя 1 имеется над полем из q элементов?

ГЛ5⋄4. Числа $1, 2, 3, \dots, n^2$ всеми возможными способами организуются в квадратные матрицы размера $n\times n$. Найдите сумму определителей этих матриц.

ГЛ5⋄5 (теорема об окаймляющих минорах). Докажите, что $\operatorname{rk} A = m$ если и только если в A есть такая невырожденная подматрица размера $m\times m$, что все содержащие её подматрицы размера $(m+1)\times(m+1)$ вырождены.

ГЛ5⋄6*. Существует ли комплексная 2×4 матрица с множеством 2×2 миноров
а) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ **б)** $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?
Если да — приведите пример такой матрицы, если нет — объясните, почему.

ГЛ5⋄7. Вычислите все частные производные $\partial^k \det(A)/\partial a_{i_1j_1}\dots\partial a_{i_kj_k}$.

ГЛ5⋄8*. Вычислите $\det(x^{j-i-1 \pmod n})$, где $1\leqslant j, j\leqslant n$.

ГЛ5⋄9* (детерминант Сильвестра). Пусть $f(x) = a_0x^m + \ldots + a_m$, $g(x) = b_0x^n + \ldots + b_n$, где $m\geqslant n$ и $a_0b_0\neq 0$. Для $k\geqslant 0$ обозначим через d_k определитель матрицы, полученной выкидыванием по k строк и столбцов сверху, снизу, слева и справа из матрицы

$$\begin{array}{l}\left(\begin{array}{cccccc} a_0 & \dots & \dots & a_m & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & a_0 & \dots & \dots & a_m \\ & & & b_0 & \dots & b_n \\ & & \iddots & & \iddots & \\ & \iddots & & \iddots & & \\ b_0 & \dots & b_n & & & \end{array}\right)\begin{array}{l}\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\}n\\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\}m\end{array}\end{array}$$

(пустые места заполнены нулями). Покажите, что $\deg \text{нод}\,(f,g) = \min(k : d_k\neq 0)$.

ГЛ5⋄10* (матричная теорема о деревьях). Вершины связного графа Γ без петель[1] и кратных рёбер[2] занумерованы числами от 1 до n. Матрица $A = (a_{ij})$ имеет диагональными элементами a_{ii} взятые со знаком минус количества рёбер, выходящих из i-той вершины, а остальные a_{ij} равны единице, если вершины i и j соединены ребром, и нулю — если не соединены. Убедитесь, что $\det A = 0$ и докажите, что **а)** все алгебраические дополнения A_{ii} к элементам главной диагонали отличны от нуля и равны между собой **б)** Γ дерево если и только если все $A_{ii} = 1$.

ГЛ5⋄11*. Покажите, что однородный грассманов многочлен ω второй степени тогда и только тогда является произведением двух линейных, когда $\omega\wedge\omega = 0$.

ГЛ5⋄12*. Докажите, что для любых двух матриц $A, B\in \operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$ в $\Bbbk[x,y]$ выполнено равенство $\det(xA+yB) = \sum_{k=0}^n x^ky^{n-k}\operatorname{tr}(\mathcal{A}_k\mathcal{B}_k^\vee)$, где $\mathcal{A}_k$ и $\mathcal{B}_k^\vee$ суть матрицы размера $\binom{n}{k}\times\binom{n}{k}$, клетки которых нумеруются k-элементными подмножествами $I, J\subset\{1, 2, \dots, n\}$ и которые имеют в позиции IJ, соответственно, минор a_{IJ} матрицы A и алгебраическое дополнение $(-1)^{|J|+|I|}b_{\hat{J}\hat{I}}$ к JI-тому минору матрицы B.

[1] Т. е. рёбер, ведущих из вершины в неё саму.

[2] Т. е. любые две вершины графа соединяются не более, чем одним ребром.

Персональный табель ______________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 5 (23.11.2021)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5			
6а			
б			
7			
8			
9			
10а			
б			
11			
12			