

## §22. Сферы

**22.1. Элементарные свойства сфер.** Напомню, что *сферой* радиуса  $r > 0$  с центром в точке  $c$  евклидова аффинного пространства  $A^n = A(V)$  называется квадрика  $S(r, c) \subset A^n$ , задаваемая аффинным уравнением

$$(x - c, x - c) - r^2 = 0, \quad (22-1)$$

где  $(*, *)$  обозначает евклидово скалярное произведение на подлежащем евклидовом векторном пространстве  $V \simeq \mathbb{R}^n$ . Мы будем называть уравнение (22-1) *приведённым аффинным уравнением сферы*  $S(r, c)$  и обозначать неоднородный квадратичный многочлен, стоящий в его левой части, через

$$s_{r,c}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x - c, x - c) - r^2. \quad (22-2)$$

Геометрически, уравнение (22-1) означает, что сфера  $S(r, c)$  является ГМТ  $x$ , удалённых от центра сферы на расстояние  $r$ . Каждая проходящая через  $c$  прямая с вектором скорости  $e \in V$  единичной длины пересекает сферу по точкам  $c \pm re$ . Отрезок с концами в таких точках называется *диаметром* сферы. Уравнение (22-1) равносильно тому, что  $(x - c + re, x - c - re) = 0$ . Таким образом, сфера представляет собою ГМТ, из которых её диаметр виден под прямым углом.

**ПРИМЕР 22.1 (ОПИСАННАЯ СФЕРА СИМПЛЕКСА)**

Если точки  $p_0, p_1, \dots, p_n \in A^n$  не лежат в одной гиперплоскости, то через них проходит единственная сфера. Она называется *описанной сферой* симплекса  $[p_0, p_1, \dots, p_n]$ . Действительно, ГМТ, равноудалённых от двух точек  $p_0$  и  $p_i$ , описывается уравнением<sup>1</sup>

$$(x - p_0, x - p_0) = (x - p_i, x - p_i),$$

которое эквивалентно линейному неоднородному уравнению

$$2(x, p_i - p_0) = (p_i, p_i) - (p_0, p_0). \quad (22-3)$$

Задаваемая этим уравнением гиперплоскость проходит через точку  $(p_i + p_0)/2$  перпендикулярно вектору  $p_i - p_0$  и называется *срединным перпендикуляром* к отрезку  $[p_0, p_i]$ . ГМТ, равноудалённых от всех точек  $p_0, p_1, \dots, p_n$ , является пересечением срединных перпендикуляров к  $n$  отрезкам  $[p_0, p_i]$ , где  $1 \leq i \leq n$ . Так как векторы  $p_i - p_0$  линейно независимы, система из  $n$  линейных уравнений (22-3) имеет единственное решение  $c$ . Это центр описанной сферы.

**22.1.1. Пересечение сферы с аффинным подпространством.** Если аффинное подпространство  $\Pi \subset A^n$  находится на расстоянии  $\varrho$  от центра  $c$  сферы  $S(r, c)$ , то при  $\varrho > r$  пересечение  $\Pi \cap S(r, c)$  пусто, а при  $\varrho < r$  представляет собою лежащую в  $\Pi$  сферу радиуса  $\sqrt{r^2 - \varrho^2}$  с центром в ортогональной проекции  $c_\Pi$  точки  $c$  на подпространство  $\Pi$ . Чтобы убедиться в этом, положим в уравнении (22-1) переменную точку  $x$  равной  $c_\Pi + z$ , где вектор  $z = x - c_\Pi$  пробегает направляющее векторное пространство аффинного подпространства  $\Pi$ . Так как  $(z, c_\Pi - c) = 0$ , а  $(c_\Pi - c, c_\Pi - c) = \varrho^2$ , мы получаем на  $z$  уравнение  $(z, z) = r^2 - \varrho^2$ .

При  $\varrho = r$  сфера  $\Pi \cap S(r, c)$  вырождается в одну точку  $p = c_\Pi$ . Следовательно, в этом случае подпространство  $\Pi$  содержится в касательном пространстве к сфере в точке  $p \in S(r, c)$ . Таким

<sup>1</sup>Ср. с прим. 10.2 на стр. 133.

образом, в каждой точке  $p \in S$  касательное пространство  $T_p S(r, c)$  представляет собою гиперплоскость, проходящую через точку  $p$  перпендикулярно вектору  $p - c$ , и задаётся линейным неоднородным уравнением

$$(x - c, p - c) = r^2. \tag{22-4}$$

УПРАЖНЕНИЕ 22.1. Убедитесь, что это согласуется с описанием касательного пространства к произвольной проективной квадратике, данным в н° 16.3.1 на стр. 212.

**22.1.2. Степень точки относительно сферы.** Значение  $s_{r,c}(p) = (p - c, p - c) - r^2$  квадратичного полинома (22-2) на произвольно взятой точке  $p \in \mathbb{A}^n$  называется *степенью* точки  $p$  относительно сферы  $S(r, c)$ . Степень обращается в нуль в точности на точках сферы  $S(r, c)$  и отрицательна внутри ограничиваемого сферой шара, достигая своего минимума  $-r^2$  в единственной точке — центре сферы. Каждая внешняя по отношению к шару точка  $p$  имеет положительную степень  $|p - c|^2 - r^2 = |p - q|^2$ , равную квадрату длины любого касательного отрезка  $[p, q]$ , опущенного из  $p$  на сферу, см. рис. 22◊1. Если проходящая через точку  $p$  прямая  $p + te$  с направляющим вектором  $e$  единичной длины пересекает сферу  $S(r, c)$  в точках  $q_1 = p + t_1 e$  и  $q_2 = p + t_2 e$ , то подставляя  $x = p + te$  в  $s_{r,c}(x) = (x - c, x - c) - r^2$ , заключаем, что  $t_1$  и  $t_2$  — корни квадратного трёхчлена  $t^2 + 2(e, p - c)t + s_{r,c}(p)$ , откуда<sup>1</sup>

$$(q_1 - p, q_2 - p) = t_1 t_2 = s_{r,c}(p). \tag{22-5}$$

Это наблюдение известно как *теорема о степени точки относительно сферы*.

ПРИМЕР 22.2 (РАДИКАЛЬНАЯ ГИПЕРПЛОСКОСТЬ)

ГМТ, имеющих равные степени относительно сфер  $S(r_1, c_1)$  и  $S(r_2, c_2)$ , описывается уравнением  $(x - c_1, x - c_1) - r_1^2 = (x - c_2, x - c_2) - r_2^2$ , которое эквивалентно линейному уравнению

$$\left(x - \frac{c_1 + c_2}{2}, c_2 - c_1\right) = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2}, \tag{22-6}$$

задающему гиперплоскость, перпендикулярную вектору  $c_2 - c_1$  и удалённую от середины отрезка  $[c_1, c_2]$  на расстояние  $|r_1^2 - r_2^2|/2|c_2 - c_1|$  в направлении центра сферы меньшего радиуса. Эта гиперплоскость называется *радикальной гиперплоскостью* сфер  $S(r_1, c_1)$  и  $S(r_2, c_2)$ . Когда сферы пересекаются, т. е. при  $r_1 - r_2 \leq |c_2 - c_1| \leq r_1 + r_2$ , где  $r_1 \geq r_2$ , радикальная гиперплоскость пересекает каждую из сфер в точности по сфере  $S(r_1, c_1) \cap S(r_2, c_2)$ , точки которой имеют степень нуль относительно обеих сфер.

**22.1.3. Сферы как комплексные проективные квадрики.** отождествим евклидово координатное векторное пространство  $V = \mathbb{R}^n$  с множеством вещественных точек комплексного пространства  $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$  с координатами  $(x_1, \dots, x_n)$  и комплексно билинейной формой

$$\begin{aligned} (*, *) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C} \\ \left((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\right) &= x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{C}, \end{aligned} \tag{22-7}$$

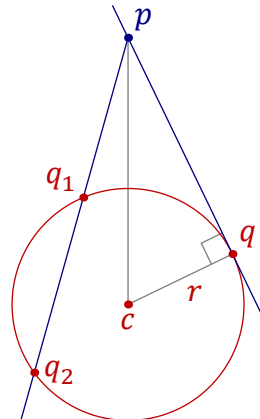


Рис. 22◊1.  $s_{r,c}(p) = |q - p|^2 = (q_1 - p, q_2 - p)$ .

<sup>1</sup>Ср. с прим. 21.3 на стр. 285.

которая продолжает евклидово скалярное произведение на  $\mathbb{R}^n$ . Вложим  $\mathbb{C}^n$  в качестве стандартной аффинной карты  $x_0 = 1$  в комплексное проективное пространство  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$  с однородными координатами  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  — проективизацию векторного пространства  $W = \mathbb{C}e_0 \oplus V_{\mathbb{C}}$ . Проективное замыкание сферы  $S(r, c) \subset A(V_{\mathbb{C}})$  с приведённым аффинным уравнением  $(x, x) - 2(x, c) + (c, c) - r^2 = 0$  задаётся в  $\mathbb{P}_n$  однородным уравнением

$$(x, x) - 2x_0(x, c) + x_0^2((c, c) - r^2) = 0, \quad (22-8)$$

где через  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и  $c = (c_1, \dots, c_n)$  по-прежнему обозначаются последние  $n$  координат. Все сферы (22-8) пересекают бесконечно удалённую гиперплоскость  $x_0 = 0$  по абсолютной квадрике

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}}) \mid (x, x) = 0\}, \quad (22-9)$$

состоящей из комплексных изотропных векторов евклидова скалярного произведения (22-7).

УПРАЖНЕНИЕ 22.2. Пусть две проективные квадрики имеют общее гиперплоское сечение. Покажите, что у них есть и второе общее гиперплоское сечение<sup>1</sup>.

Применительно к сферам (22-8) утверждение из упр. 22.2 очевидно: однородные уравнения

$$\begin{aligned} (x, x) - x_0(2(x, c_1) + x_0(c_1, c_1) - x_0 r_1^2) &= 0 \\ (x, x) - x_0(2(x, c_2) + x_0(c_2, c_2) - x_0 r_2^2) &= 0 \end{aligned}$$

при любых  $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$  и  $c_1, c_2 \in V_{\mathbb{C}}$  совпадают друг с другом как при  $x_0 = 0$ , так и на гиперплоскости, вдоль которой совпадают друг с другом линейные множители, на которые умножается  $x_0$ . Второе гиперплоское сечение описывается уравнением

$$2(x, c_1) + x_0(c_1, c_1) - x_0 r_1^2 = 2(x, c_2) + x_0(c_2, c_2) - x_0 r_2^2,$$

которое преобразуется к тому же самому виду, что и уравнение (22-6) выше:

$$\left(x - x_0 \frac{c_1 + c_2}{2}, c_2 - c_1\right) = x_0 \frac{r_1^2 - r_2^2}{2}. \quad (22-10)$$

При  $c_1 \neq c_2$  и  $x_0 = 1$  оно задаёт радикальную гиперплоскость (22-6), а при  $c_1 = c_2$  — бесконечно удалённую гиперплоскость  $x_0 = 0$ . Таким образом, радикальной гиперплоскостью двух концентрических сфер разумно считать бесконечно удалённую гиперплоскость.

УПРАЖНЕНИЕ 22.3. Покажите, что все квадрики (22-8) с центром в данной точке  $c \in \mathbb{C}^n$  и произвольными  $r \in \mathbb{C}$  образуют пучок комплексных проективных квадрик, натянутый на двойную бесконечно удалённую гиперплоскость  $x_0^2 = 0$  и простой конус  $(x - c, x - c) = 0$  с вершиной  $c$  над абсолютной квадрикой (22-9), причём все остальные квадрики пучка, за исключением этих двух, являются гладкими.

**22.2. Пространство псевдосфер.** Все квадратичные формы (22-8) с вещественными центрами  $c \in V \simeq \mathbb{R}^n$  и  $r > 0$  лежат в вещественном векторном подпространстве  $\Sigma \subset S^2 W^*$  размерности  $n + 2$ , состоящем из всех однородных вещественных квадратичных форм вида

$$q = \alpha(x, x) - 2x_0(x, c) + \beta x_0^2, \quad \text{где } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, c \in V. \quad (22-11)$$

<sup>1</sup>Возможно, совпадающее с первым.

Проективизация  $\mathbb{S} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\Sigma)$  называется пространством  $(n - 1)$ -мерных псевдосфер в  $\mathbb{R}^n$ . Таким образом,  $\mathbb{S} \simeq \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$  представляет собою вещественное проективное пространство размерности  $n + 1$ . Стандартная аффинная карта  $U_\alpha \subset \mathbb{S}$ , на которой  $\alpha = 1$ , состоит из псевдосфер, задаваемых приведёнными уравнениями

$$(x, x) - 2x_0(x, c) + \beta x_0^2 = (x - cx_0, x - cx_0) - ((c, c) - \beta) = 0. \quad (22-12)$$

При  $(c, c) > \beta$  такая квадратика является настоящей вещественной сферой с квадратом радиуса

$$r^2 = (c, c) - \beta, \quad (22-13)$$

при  $(c, c) = \beta$  — простым конусом с вершиной  $c$  над абсолютной квадратикой (22-9), который виден в  $\mathbb{R}^n$  как двойная точка  $c$ , а при  $(c, c) < \beta$  псевдосфера (22-12) является гладкой проективной квадратикой без вещественных точек, которую мы будем называть *мнимой сферой*. Бесконечная гиперплоскость  $L_\infty = \mathbb{S} \setminus U_\alpha$  аффинной карты  $U_\alpha$  состоит из псевдосфер (22-11), имеющих  $\alpha = 0$  и распадающихся в объединение бесконечной гиперплоскости  $x_0 = 0$  проективного пространства<sup>1</sup>  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$  и гиперплоскости  $2(x, c) = \beta x_0$ , которая при  $c = 0$  совпадает с  $x_0 = 0$ , а в остальных случаях видна в  $\mathbb{R}^n$  как аффинная гиперплоскость с нормальным вектором  $c$ . Таким образом, точки пространства псевдосфер биективно соответствуют аффинным гиперплоскостям, а также вещественными и мнимыми сферам<sup>2</sup> в  $\mathbb{R}^n$ . Кроме них, в  $\mathbb{S}$  имеется ещё одна точка — псевдосфера  $x_0^2 = 0$ , которую мы обозначим  $\infty \in L_\infty \subset \mathbb{S}$ .

На векторном пространстве  $\Sigma$  есть квадратичная форма

$$\varrho(q) \stackrel{\text{def}}{=} (c, c) - \alpha\beta, \quad (22-14)$$

значение которой на настоящей сфере, заданной приведённым уравнением (22-12), равно квадрату радиуса (22-13) этой сферы. Форма (22-14) имеет сигнатуру  $(n + 1, 1)$  и задаёт в пространстве псевдосфер  $\mathbb{S}$  проективную квадратичку  $R = V(\varrho)$ , которая касается бесконечности  $L_\infty \subset \mathbb{S}$  в точке  $\infty$ , отвечающей псевдосфере  $x_0^2 = 0$ . В аффинной карте  $U_\alpha$  квадратика  $R$  выглядит как сферический параболоид  $(c, c) = \beta$ , состоящий из сфер нулевого радиуса, задаваемых уравнениями  $(c - x, c - x) = 0$  и биективно соответствующих точкам  $c \in \mathbb{R}^n$ . Внутренность  $(c, c) < \beta$  этого параболоида состоит из мнимых сфер, а внешность  $(c, c) > \beta$  — из настоящих.

**УПРАЖНЕНИЕ 22.4.** Явно вычислите определитель Грама квадратичной формы (22-11) в стандартном ортонормальном базисе пространства  $\mathbb{R}^n$  и убедитесь, что форма (22-11) особа если и только если она лежит на бесконечной гиперплоскости  $\alpha = 0$  пространства  $\mathbb{S}$  или на параболоиде  $(c, c) = \alpha\beta$ .

Поляризация  $\tilde{\varrho}$  формы (22-14) скалярно перемножает псевдосферы  $S_1, S_2 \in \mathbb{S}$  с однородными уравнениями  $\alpha_1(x, x) - 2x_0(x, c_1) + \beta_1 x_0^2 = 0$  и  $\alpha_2(x, x) - 2x_0(x, c_2) + \beta_2 x_0^2 = 0$  по правилу

$$\tilde{\varrho}(S_1, S_2) = (c_1, c_2) - (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)/2. \quad (22-15)$$

**ЛЕММА 22.1**

Если  $S_1$  и  $S_2$  пересекаются в конечной точке  $p \in \mathbb{C}^n$ , то  $\tilde{\varrho}(S_1, S_2) = (\alpha_1 p - c_1, \alpha_2 p - c_2)$ , где справа стоит стандартное евклидово скалярное произведение.

<sup>1</sup>Куда исходное аффинное пространство  $\mathbb{R}^n$ , в котором рассматриваются все сферы, вложено в качестве стандартной аффинной карты  $U_0$ , где  $x_0 = 1$ , см. самое начало п° 22.1.3.

<sup>2</sup>Включая сферы нулевого радиуса, т. е. точки в  $\mathbb{R}^n$ .

Доказательство. Так как точка  $p$  лежит в аффинной карте  $x_0 = 1$  и на каждой из псевдосфер, выполняются равенства  $2(p, c_1) - \alpha_1(p, p) = \beta_1$  и  $2(p, c_2) - \alpha_1(p, p) = \beta_2$ . Умножая первое из них на  $\alpha_2$ , а второе — на  $\alpha_1$  и складывая, получаем

$$-(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)/2 = (\alpha_1p, \alpha_2p) - (\alpha_1p, c_2) - (\alpha_2p, c_1) = (\alpha_1p - c_1, \alpha_2p - c_2) - (c_1, c_2).$$

Сравнивая с (22-15), получаем требуемое.  $\square$

Следствие 22.1

Если псевдосферы  $S_1, S_2 \notin R \subset \mathbb{S}$  имеют непустое пересечение в  $\mathbb{R}^n$ , то в каждой гладкой на обеих псевдосферах точке  $p$  их пересечения косинус острого угла между касательными гиперплоскостями равен<sup>1</sup>

$$\cos \angle(T_p S_1, T_p S_2) = |\tilde{q}(S_1, S_2)| / \sqrt{q(S_1)q(S_2)}. \quad (22-16)$$

Доказательство. Пусть псевдосфера  $S$  задаётся в  $\mathbb{P}_n$  квадратичной формой

$$q(x) = \alpha(x, x) - 2x_0(c, x) + \beta x_0^2,$$

где  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Поляризация формы  $q$  имеет вид

$$\tilde{q}(x, y) = \alpha(x, y) - x_0(c, y) - y_0(c, x) + \beta x_0 y_0,$$

а касательное пространство  $T_p S$  в точке  $p = (1, p_1, \dots, p_n)$  имеет однородное уравнение

$$\alpha(p, x) - (c, x) = ((p, c) - \beta) \cdot x_0,$$

где  $p = (p_1, \dots, p_n)$ . Оно наблюдается в аффинной карте  $x_0 = 1$  как аффинная гиперплоскость  $(\alpha p - c, x) = (p, c) - \beta$ , перпендикулярная вектору  $\alpha p - c \in \mathbb{R}^n$ . Косинус острого угла между двумя такими гиперплоскостями, касающимися псевдосфер  $S_1$  и  $S_2$  в точке  $p \in S_1 \cap S_2$ , равен

$$\cos \angle(T_p S_1, T_p S_2) = \frac{|(\alpha_1 p - c_1, \alpha_2 p - c_2)|}{\sqrt{(\alpha_1 p - c_1, \alpha_1 p - c_1) \cdot (\alpha_2 p - c_2, \alpha_2 p - c_2)}}.$$

Остаётся применить лем. 22.1.  $\square$

Следствие 22.2

Полярная гиперплоскость каждой сферы  $S \in \mathbb{S}$  относительно параболоида  $P \subset \mathbb{S}$  состоит из всех псевдосфер, евклидово перпендикулярных сфере  $S$ .  $\square$

Пример 22.3

Удвоенное  $\tilde{q}$ -произведение двух настоящих сфер  $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$  с приведёнными аффинными уравнениями  $(x, x) - 2(x, c_1) + (c_1, c_1) - r_1^2 = 0$  и  $(x, x) - 2(x, c_2) + (c_2, c_2) - r_2^2 = 0$  равно

$$2\tilde{q}(S_1, S_2) = 2(c_1, c_2) - (c_1, c_1) + r_1^2 - (c_2, c_2) + r_2^2 = r_1^2 + r_2^2 - (c_2 - c_1, c_2 - c_1).$$

Оно зануляется если и только если  $(c_2 - c_1, c_2 - c_1) = r_1^2 + r_2^2$ , и это означает, что сферы  $S_1$  и  $S_2$  пересекаются под прямым углом. Для сферы  $P = S(0, p)$  нулевого радиуса и сферы  $S = S(r, c)$  с приведёнными уравнениями  $(x, x) - 2(x, p) + (p, p) = 0$  и  $(x, x) - 2(x, c) + (c, c) - r^2 = 0$  удвоенное  $\tilde{q}$ -произведение  $2\tilde{q}(P, S) = r^2 - (p - c, p - c) = -s_{r,c}(p)$  противоположно по знаку степени точки  $p$  относительно сферы  $S$ , и  $\tilde{q}$ -ортогональность таких сфер означает, что  $p \in S$ . Мы заключаем, что точки сферы  $S \subset \mathbb{R}^n$  суть сферы нулевого радиуса, образующие видимый из точки  $S \in \mathbb{S}$  контур параболоида<sup>2</sup>  $R \subset \mathbb{S}$ .

<sup>1</sup>Обратите внимание, что правая часть равенства не зависит от выбора точки  $p$  и не меняется при умножении уравнения любой из сфер на ненулевую константу.

<sup>2</sup>Т. е. пересечение параболоида  $R \subset \mathbb{S}$  с полярной гиперплоскостью точки  $S \subset \mathbb{S}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 22.5. Покажите, что центр сферы  $S$  является сферой радиуса нуль, в которой параболоид  $R$  пересекается с прямой  $(P\infty) \subset \mathbb{S}$ .

**22.3. Пучки сфер.** Все вещественные квадрики из пучка комплексных проективных квадрик, порождённого двумя настоящими сферами  $S_1 = S(r_1, c_1)$  и  $S_2 = S(r_2, c_2)$  в  $\mathbb{R}^n$ , образуют прямую  $\ell$  в пространстве псевдосфер  $\mathbb{S}$ . Эта прямая пересекает бесконечность  $L_\infty \subset \mathbb{S}$  ровно в одной точке вида  $\xi x_0$ , где  $\xi \in W^*$  — однородная вещественная линейная форма от  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ .

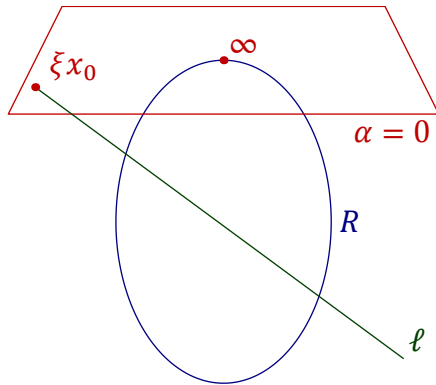


Рис. 22.2. Пучок без простых конусов.

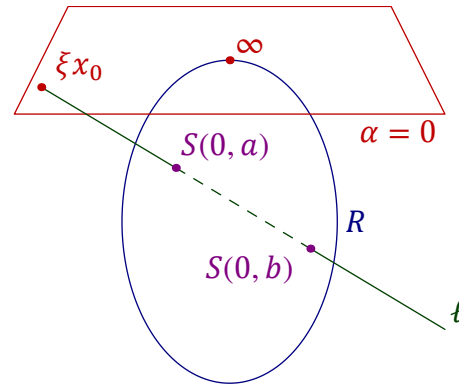


Рис. 22.3. Пучок с двумя простыми конусами.

Если  $\xi \neq x_0$ , то этой точке отвечает распавшаяся квадрика ранга 2, имеющая в пучке кратность<sup>1</sup> не менее  $n - 1$ , а если  $\xi = 0$  — двойная плоскость ранга 1, имеющая в пучке кратность не менее  $n$ . Таким образом, в первом случае на прямой  $\ell$  может быть ещё не более двух особых квадрик суммарной кратности 2, а во втором — не более одной, причём однократной. Мы заключаем, что в первом случае пучке  $\ell$  содержится ровно одна распавшаяся квадрика — объединение бесконечно удалённой гиперплоскости  $x_0 = 0$  и гиперплоскости  $\Pi = \text{Ann } \xi$ , которая является вторым, отличным от бесконечно удалённого, общим (комплексным) гиперплоским сечением всех сфер пучка, т. е. видна в аффинном пространстве  $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$  как радикальная гиперплоскость любой пары сфер в пучке  $\ell$ .

С другой стороны, прямая  $\ell = (S_1, S_2)$  в вещественном проективном пространстве  $\mathbb{S}$  может располагаться по отношению к параболоиду  $R = V(\varrho)$  тремя способами: не пересекать его вовсе, как на рис. 22.2, касаться ровно в одной точке, автоматически отличной от  $\infty$ , как на рис. 22.5, и пересекать в двух различных точках, как на рис. 22.3. Последний случай распадается на два подслучая: когда обе точки пересечения отличны от  $\infty$ , и когда одна из них совпадает  $\infty$ , как на рис. 22.9.

Ну а с точки зрения линейной алгебры, вещественные уравнения сфер  $S_1$  и  $S_2$  порождают двумерное векторное подпространство  $U = \text{span}(S_1, S_2)$  в вещественном векторном пространстве  $\Sigma$ , и невырожденная квадратичная форма  $\varrho$ , имеющая на  $\Sigma$  сигнатуру  $(n + 1, 1)$ , может ограничиваться на  $U$  либо в положительно определённую форму сигнатуры  $(2, 0)$ , либо в гиперболическую форму сигнатуры  $(1, 1)$ , либо в вырожденную форму с одномерным ядром.

Все эти возможности сочетаются друг с другом следующим образом.

<sup>1</sup>См. лем. 19.1 на стр. 251 и предваряющие её определения.

**22.3.1. Пучок соприкасающихся сфер.** Прямая  $\ell$  касается  $R$  в точке  $C = S(0, c)$  тогда и только тогда, когда форма  $\varrho$  ограничивается на подпространство  $U$  в вырожденную форму с одномерным ядром, порождённым  $C$ . Поскольку одноточечная сфера  $C$   $\varrho$ -ортогональна всем сферам пучка, она лежит на всех сферах. Это означает, что любые две сферы пучка пересекаются ровно по точке  $c$  — единственной вещественной базисной точке пучка. Линейная форма  $\xi$ , возникающая из  $\ell \cap L_\infty = \{\xi x_0\}$ , задаёт общую касательную гиперплоскость всех сфер пучка. Наоборот, множество всех сфер, касающихся заданной гиперплоскости  $\Pi = \text{Ann } \xi$  в заданной точке  $c$ , очевидно, составляет пучок сфер, касающийся параболоида  $R$  в точке  $C = S(0, c)$ . Такой пучок порождается псевдосферами  $x_0\xi$  и  $S(0, c)$ . Сферы  $S(r_1, c_1)$  и  $S(r_2, c_2)$  с  $r_1 \geq r_2$  порождают пучок пересекающихся сфер если и только если  $|c_2 - c_1| = r_1 \pm r_2$ .

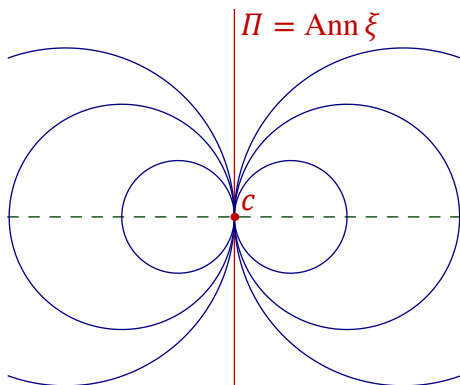


Рис. 22◊4. Пучок соприкасающихся сфер.

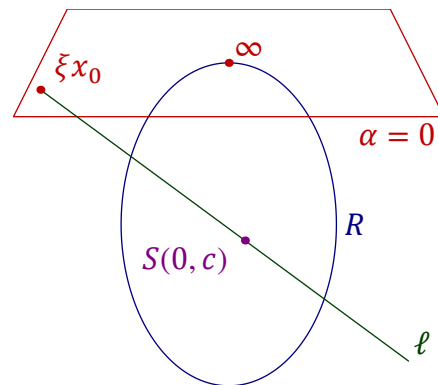


Рис. 22◊5. Соответствующая прямая в  $\mathbb{S}$ .

**22.3.2. Пучок трансверсально пересекающихся сфер.** Условие  $\ell \cap R = \emptyset$  означает, что на прямой  $\ell$  нет особых квадрик, кроме распавшейся квадрики  $\ell \cap L_\infty = x_0\xi$ , у которой  $\xi \neq x_0$ , и что в подпространстве  $U = \text{span}(S_1, S_2)$  нет ненулевых  $\varrho$ -изотропных векторов. Последнее равносильно тому, что форма  $\varrho|_U$  положительно определена. В этом случае  $\Sigma = U \oplus U^\perp$ , где  $U^\perp = S_1^\perp \cap S_2^\perp$  и ограничение  $\varrho|_{U^\perp}$  имеет сигнатуру  $(n - 1, 1)$ . Так как в  $S_1^\perp \cap S_2^\perp$  есть ненулевые изотропные векторы, видимые из точек  $S_1$  и  $S_2$  контуры параболоида  $R$  пересекаются, и отвечающие точкам пересечения одноточечные сферы лежат в пересечении  $S_1 \cap S_2$ .

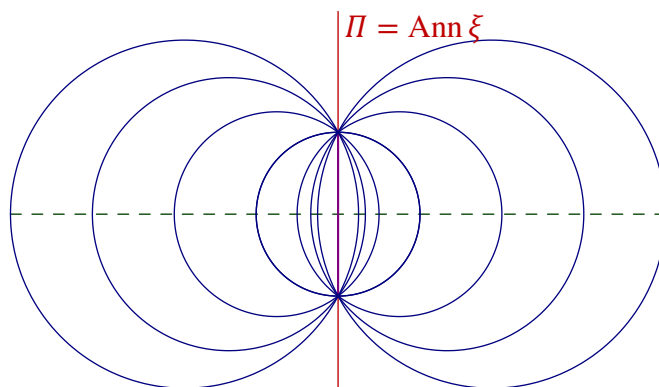


Рис. 22◊6. Пучок пересекающихся сфер.

<sup>1</sup>Здесь и далее ортогональны берутся относительно формы  $\varrho$ .



Мы заключаем, что любые две сферы в пучке пересекаются, причём трансверсально, так как в противном случае мы имели бы пучок соприкасающихся сфер, касающийся параболоида  $R$ . Итак, пучок  $\ell$  состоит из всех сфер, пересекающих радикальную ось  $\Pi = \text{Ann } \xi$  по фиксированной  $(n-2)$ -мерной сфере  $S(r_1, c_1) \cap S(r_2, c_2)$ , которая представляет собою вещественное базисное множество пучка. Сферы  $S(r_1, c_1)$  и  $S(r_2, c_2)$  с  $r_1 \geq r_2$  порождают пучок пересекающихся сфер если и только если  $r_1 - r_2 < |c_2 - c_1| < r_1 + r_2$ .

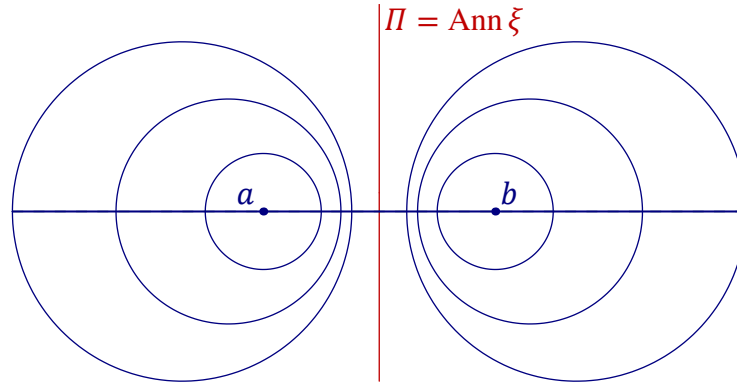


Рис. 22◊7. Пучок непересекающихся сфер.

**22.3.3. Пучок непересекающихся сфер.** Прямая  $\ell$  пересекает параболоид  $R$  по двум различным точкам, отличным от  $\infty$ , если и только если в пучке  $\ell$  помимо распавшейся псевдосферы  $x_0 \xi$  имеются ровно две особые квадратики с коранга 1 — сферы радиуса нуля с центрами в двух различных точках. В этом случае форма  $q$  ограничивается на  $U = \text{span}(S_1, S_2)$  в гиперболическую форму сигнатуры  $(1, 1)$ , а на  $U^\perp = S_1^\perp \cap S_2^\perp$  — в положительно определённую. Тем самым, видимые из  $S_1$  и  $S_2$  контуры параболоида  $R$  не пересекаются, а значит, никакие две сферы пучка не пересекаются, но имеют общую радикальную ось. Сферы  $S(r_1, c_1)$  и  $S(r_2, c_2)$  с  $r_1 \geq r_2$  порождают пучок пересекающихся сфер если и только если  $r_1 + r_2 < |c_2 - c_1|$  или  $|c_1 - c_2| < r_1 - r_2$ .

**22.3.4. Пучок концентрических сфер.** Если прямая  $\ell$  пересекает параболоид  $R$  в точке  $\infty$ , то она пересекает его и ещё ровно в одной, отличной от  $\infty$  точке, как на рис. 22◊9. Вторая точка пересечения отвечает одноточечной сфере  $A = S(0, a)$  с уравнением  $(x - a, x - a) = 0$ , а весь пучок представляет собою пучок концентрических сфер  $(x - ax_0, x - ax_0) + \beta x_0^2 = 0$ , где  $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

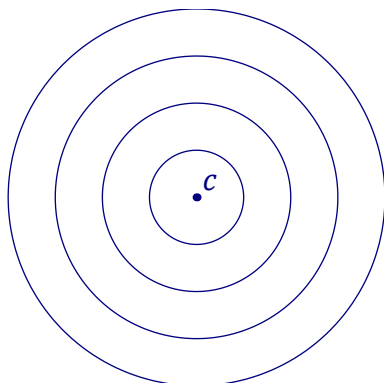


Рис. 22◊8. Пучок концентрических сфер.

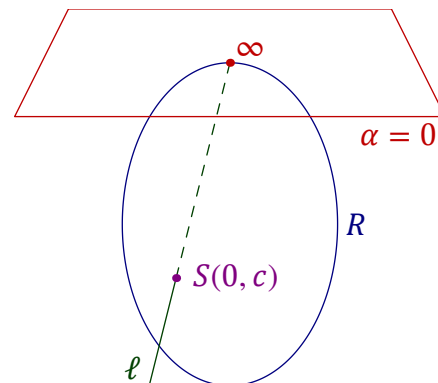


Рис. 22◊9. Соответствующая прямая в  $\mathcal{S}$ .



**22.4. Инверсии.** Каждая псевдосфера  $S = S(r, c) \subset \mathbb{R}^n$  с  $\tilde{\rho}(S) > 0$  является анизотропным вектором квадратичной формы  $\varrho$  и задаёт проективное преобразование  $\sigma_S : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ , индуцированное отражением в ортогональной к  $S$  гиперплоскости  $S^\perp \subset \mathbb{S}$  и переводящее каждую псевдосферу  $Q \in \mathbb{S}$  в лежащую на прямой  $(PQ)$  псевдосферу<sup>1</sup>

$$\sigma_S(Q) = \varrho(S) \cdot Q - 2 \tilde{\rho}(Q, S) \cdot S. \quad (22-17)$$

При этом сама псевдосфера  $S$  и все псевдосферы, евклидово ортогональные к  $S$ , переходят в себя. Отражение (22-17) сохраняет параболоид  $R$ , действуя на нём как инволюция, переставляющая между собою точки пересечения параболоида с проходящими через  $S$  прямыми. Поскольку  $R$  состоит из одноточечных сфер нулевого радиуса и точки  $\infty$ , отражение (22-17) задаёт на одноточечной компактификации  $\hat{\mathbb{R}}^n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^n \sqcup \infty$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  инволютивную биекцию

$$\sigma_S : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n, \quad A = S(0, a) \mapsto \sigma_S(0, a) = R \cap (AS) \setminus A, \quad (22-18)$$

которая называется *инверсией* пространства  $\mathbb{R}^n$  относительно псевдосферы  $S \subset \mathbb{R}^n$ . Это действие на точки пространства  $\mathbb{R}^n$  согласовано с действием на  $\mathbb{S}$ : если точка  $Q \in \mathbb{S}$  переводится отражением (22-17) в точку  $Q' = \sigma_S(Q)$ , то видимый из точки  $Q$  контур  $R \cap Q^\perp$  параболоида  $R \subset \mathbb{S}$  переходит в контур, видимый из точки  $Q'$ , т. е. отражение  $\sigma_S : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ , переводит одноточечные сферы, из которых состоит псевдосфера  $Q \subset \mathbb{R}^n$ , в одноточечные сферы, составляющие псевдосферу  $Q' \subset \mathbb{R}^n$ . В частности, наличие или отсутствие у двух псевдосфер вещественного пересечения равносильно наличию или отсутствию пересечения у их образов. Согласно сл. 22.1 на стр. 294 углы между пересекающимися псевдосферами равны углам между их образами, т. е. инверсия (22-18) сохраняет углы между пересекающимися сферами и гиперплоскостями. В силу упр. 22.5 на стр. 295 инверсия (22-18) относительно настоящей сферы  $S = S(r, c)$  переставляет центр  $c$  сферы  $S$  с бесконечно удалённой точкой  $\infty \in \hat{\mathbb{R}}^n$ , а инверсия относительно гиперплоскости  $\Pi = V(\xi)$ , которой соответствует псевдосфера  $x_0 \xi \in \mathbb{L}_\infty = T_\infty R$ , оставляет бесконечно удалённую точку  $\infty \in \hat{\mathbb{R}}^n$  на месте.

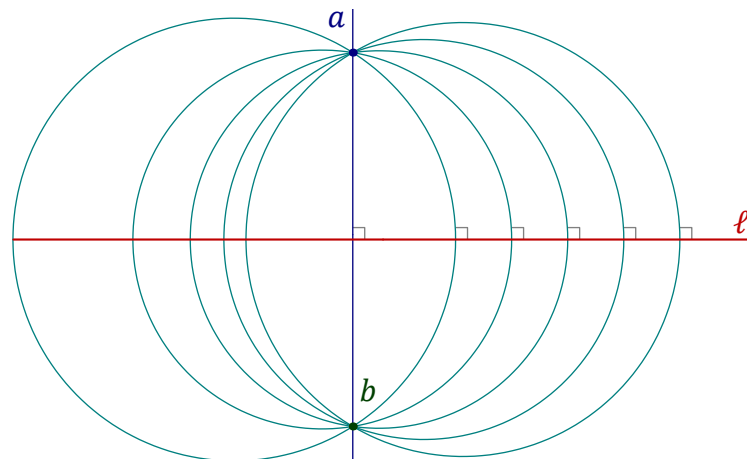


Рис. 22◊10. Инверсия относительно гиперплоскости.

<sup>1</sup>Ср. с форм. (16-8) на стр. 214.

## Следствие 22.3

Две различные точки тогда и только тогда инверсны относительно псевдосферы  $S$ , когда все проходящие через них сферы и гиперплоскости перпендикулярны сфере  $S$ , как на рис. 22◊11 и рис. 22◊10.

Доказательство сл. 22.3. Отражение  $\sigma_S : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$  переставляет одноточечные сферы  $A = S(0, a)$  и  $B = S(0, b)$  если и только если  $S \in (AB)$ . Это равносильно тому, что  $\varrho$ -ортогональное дополнение  $(AB)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$  содержится в гиперплоскости  $S^\perp$ . Но это и означает, что все проходящие через точки  $a$  и  $b$  псевдосферы перпендикулярны в  $\mathbb{R}^n$  псевдосфере  $S$ .  $\square$

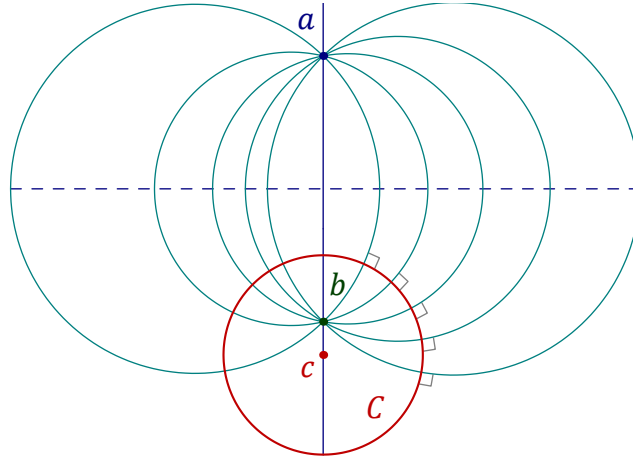


Рис. 22◊11. Инверсия относительно сферы.

Замечание 22.1. Поскольку для любых трёх различных точек пополненного пространства  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  всегда найдётся сфера или гиперплоскость, проходящая через две из точек, но не проходящая через третью, каждое двухточечное множество  $\{a, b\} \subset \widehat{\mathbb{R}}^n$  однозначно описывается как пересечение всех проходящих через него псевдосфер. Тем самым сл. 22.3 полностью определяет действие инверсии  $\sigma_S : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$  на все точки.

## Следствие 22.4

Для любых двух псевдосфер  $S, Q$  выполняется равенство  $\sigma_S \sigma_Q \sigma_S^{-1} = \sigma_{\sigma_S(Q)}$ , т. е. любые две инверсные относительно псевдосферы  $Q$  точки переводятся инверсией  $\sigma_S$  в две точки, инверсные относительно псевдосферы  $\sigma_S(Q)$ .

Доказательство. Пусть  $\sigma_Q(a) = b$ . Поскольку инверсия  $\sigma_S$  сохраняет углы между псевдосферами, она биективно отображает множество всех перпендикулярных псевдосфере  $Q$  и проходящих через точки  $a$  и  $b$  псевдосфер в множество всех псевдосфер, перпендикулярных  $\sigma_S(Q)$  и проходящих через  $\sigma_S(a)$  и  $\sigma_S(b)$ .  $\square$

## Следствие 22.5

Инверсия относительно гиперплоскости является ортогональным отражением в этой гиперплоскости.

## Следствие 22.6

Инверсия относительно сферы  $S = S(r, c)$  переводит действует на каждой проходящей через её центр  $c$  прямой как сопряжение относительно  $S$ , т. е. инверсная точке  $a \in \mathbb{R}^n$  точка  $b = \sigma_S(a)$

является пересечением прямой  $(ac)$  с полярной точке  $a$  относительно сферы  $S$  гиперплоскостью и располагается на луче  $]c, a)$  так, что  $|a - c| \cdot |\sigma_S(a) - c| = r^2$ . На языке формул:

$$\sigma_S(a) = c + \frac{r^2(a - c)}{(a - c, a - c)}. \quad (22-19)$$

Доказательство. Рассмотрим на прямой  $(ac)$  евклидову аффинную систему координат с началом в точке  $c$ . Пусть точка  $b'$  сопряжена точке  $a$  относительно  $S$ . Поскольку точки  $a$  и  $b'$  гармоничны<sup>1</sup> самосопряжённым относительно  $S$  точкам  $\pm r$ , двойное отношение  $[a, b', r, -r] = -1$ , откуда  $(a - r)(b' + r) = -(b' - r)(a + r)$  и  $ab' = r^2$ . С другой стороны, так сфера с диаметром  $[a, b]$  перпендикулярна сфере  $S$ , их радиусы и расстояние между центрами удовлетворяют теореме Пифагора:  $r^2 + ((b - a)/2)^2 = ((b + a)/2)^2$ , откуда  $ab = r^2$  и  $b = b'$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 22.6. Выведите формулу (22-19), непосредственно применив отражение (22-17) к уравнению одноточечной сферы  $S(0, a)$ .

Следствие 22.7

Каждое проходящее через центр сферы аффинное подпространство  $\Pi$  переводится инверсией  $\sigma_{r,c}$  в себя, и ограничение  $\sigma_{r,c}|_{\Pi}$  является инверсией подпространства  $\Pi$  относительно сферы  $\Pi \cap S(r, c)$ .  $\square$

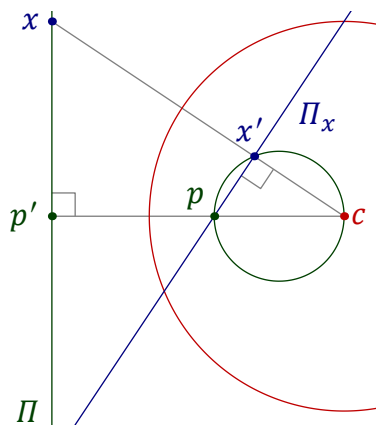


Рис. 22◊12. Инверсные сфера и гиперплоскость.

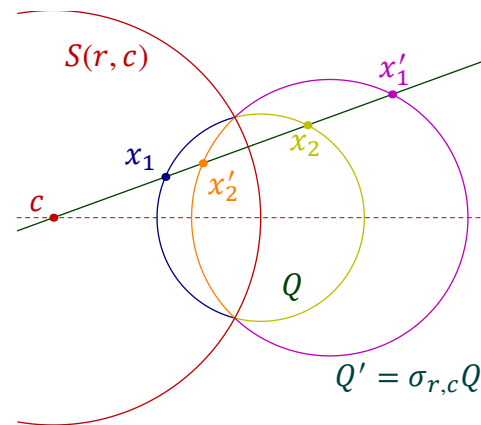


Рис. 22◊13. Инверсные сферы.

Предложение 22.1

Инверсия  $\sigma_S$  относительно сферы  $S$  с центром  $c$  переводит каждую не проходящую через  $c$  гиперплоскость  $\Pi$  в сферу с диаметром  $[p, c]$ , где  $p$  — полюс гиперплоскости  $\Pi$  относительно сферы  $S$ , а каждую проходящую через  $c$  сферу  $Q$  — в гиперплоскость, полярную второму концу выпущенного из  $c$  диаметра сферы  $Q$ .

Доказательство. В силу того, что инверсия обратна самой себе, достаточно доказать только первое утверждение. Поскольку поляр  $\Pi_x$  любой точки  $x \in \Pi$  проходит через полюс  $p$  гиперплоскости  $\Pi$ , отрезок  $[p, c]$  виден из инверсной к  $x$  точки  $x' = (cx) \cap \Pi_x$  под прямым углом, см. рис. 22◊12.  $\square$

<sup>1</sup>См. предл. 18.1 на стр. 238.

УПРАЖНЕНИЕ 22.7. Проверьте прямым вычислением, что отображение (22-19) переводит гиперплоскость  $(x - c, x - p) = 0$  и сферу  $(x - c, p - c) = r^2$  друг в друга, а также выведите предл. 22.1 непосредственно из форм. (22-17) на стр. 298.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 22.2

Инверсия  $\sigma_S$  относительно сферы  $S = S(r, c)$  переводит каждую не проходящую через  $c$  сферу  $Q = S(t, p)$  в сферу  $Q'$ , гомотетичную сфере  $Q$  относительно  $c$  с коэффициентом  $r^2/s_{t,p}(c)$ , где  $s_{t,p}(c) = (c - p, c - p) - t^2$  означает степень<sup>1</sup> центра инверсии  $c$  относительно сферы  $Q$ , см. рис. 22◊13.

Доказательство. Пусть проходящая через  $c$  прямая пересекает сферу  $Q$  в точках  $x_1, x_2$ . По теореме о степени точки<sup>2</sup>  $(x_1 - c, x_2 - c) = s_{t,p}(c)$ . Если точки  $x'_1, x'_2$  гомотетичны  $x_1, x_2$  относительно  $c$  с коэффициентом  $r^2/s_{t,p}(c)$ , то  $(x_1 - c, x'_2 - c) = r^2 = (x'_1 - c, x_2 - c)$ , откуда  $\sigma_{r,c}(x_1) = x'_2$  и  $\sigma_{r,c}(x_2) = x'_1$ .  $\square$

ПРЕДОСТЕРЕЖЕНИЕ 22.1. Центр сферы  $Q$  не обязан переходить при инверсии  $\sigma_S$  в центр сферы  $Q' = \sigma_S(Q)$ . Например, если сфера  $Q = S(t, p)$  перпендикулярна сфере  $S = S(r, c)$ , то её центр перейдёт в точку пересечения радикальной гиперплоскости с линией центров.

УПРАЖНЕНИЕ 22.8. Убедитесь в этом и докажите, что прообразом центра сферы  $Q' = \sigma_S(Q)$  является точка  $c'$ , инверсная центру  $c$  сферы  $S$  относительно сферы  $Q$ .

**22.5. Группы Мёбиуса.** Ортогональная группа  $O(n + 1, 1) \subset GL_{n+2}(\mathbb{R})$  квадратичной формы сигнатуры  $(n + 1, 1)$  на  $\mathbb{R}^{n+2}$  называется *группой Лоренца*. Её проективизация

$$M_n \stackrel{\text{def}}{=} PO(n + 1, 1) \subset PGL_{n+2}(\mathbb{R})$$

называется *группой Мёбиуса*. Эта группа имеет несколько замечательных геометрических представлений, основанных на следующей лемме.

ЛЕММА 22.2

Ортогональная группа  $O(n + 1, 1)$  порождается отражениями в гиперплоскостях, ортогональных векторам с положительными скалярными квадратами.

Доказательство. Будем действовать как в доказательстве теор. 14.2 на стр. 185. Ключевым моментом этого доказательства была лем. 14.1, утверждавшая, что для любой пары анизотропных векторов  $u, w \in \mathbb{R}^{n+2}$  с равными скалярными квадратами существует отражение, переводящее  $u$  либо в  $w$ , либо в  $-w$ . Достаточно убедиться, что такое отражение всегда можно сделать в гиперплоскости, ортогональной вектору с положительным квадратом. Для этого, как и в доказательстве лем. 14.1 на стр. 185, заметим, что векторы  $e_+ = u + w$  и  $e_- = u - w$  ортогональны друг другу. Их скалярные квадраты не могут быть оба нулевыми, поскольку ограничение формы на линейную оболочку  $\text{span}(e_+, e_-) = \text{span}(u, w)$  ненулевое. Если один из векторов имеет отрицательный скалярный квадрат, то ограничение формы сигнатуры  $(n + 1, 1)$  на ортогонал к этому вектору должно быть положительно определено, и тем самым, скалярный квадрат другого вектора обязан быть положителен. Мы заключаем, что как минимум один векторов  $e_{\pm}$  имеет положительный скалярный квадрат, что и требуется<sup>3</sup>.  $\square$

<sup>1</sup>См. н° 22.1.2 на стр. 291.

<sup>2</sup>См. формулу (22-5) на стр. 291.

<sup>3</sup>Ср. с доказательством лем. 14.1 на стр. 185.

**22.5.1. Действие на пространстве псевдосфер и в  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ .** По определению, мёбиусова группа  $M_n = \text{PO}(n+1, 1)$  действует проективными преобразованиями на пространстве  $\mathbb{S} \simeq \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+2})$  псевдосфер<sup>1</sup> в  $\mathbb{R}^n$ . Это действие сохраняет квадратичную форму  $q$  и переводит в себя параболоид  $R$ , состоящий из односточечных сфер. Таким образом возникает действие группы  $M_n$  на односточечной компактификации  $\widehat{\mathbb{R}}^n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^n \sqcup \infty$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ . Согласно лем. 22.2 возникающая группа преобразований порождается инверсиями относительно псевдосфер положительного радиуса, т. е. отражениями в сферах и гиперплоскостях. Эта группа преобразований называется *мёбиусовой группой* (пополненного) пространства  $\mathbb{R}^n$  и обозначается  $M(\mathbb{R}^n)$ . Поскольку параллельные переносы и повороты являются композициями отражений в гиперплоскостях, мёбиусова группа содержит все движения евклидова аффинного пространства  $\mathbb{R}^n$ .

УПРАЖНЕНИЕ 22.9. Убедитесь, что композиция  $\sigma_{r_2, c} \circ \sigma_{r_1, c}$  отражений в двух концентрических сферах является гомотетией с центром  $c$  и коэффициентом  $r_2^2/r_1^2$ .

Мы заключаем, что кроме движений, мёбиусова группа содержит и все преобразования подобия. Кроме того, она транзитивно действует на псевдосферах.

ПРИМЕР 22.4 (ИНВЕРСИИ, ПЕРЕВОДЯЩИЕ СФЕРУ В СФЕРУ)

Из доказательства лем. 22.2 вытекает, что сферы  $S_1 = S(r_1, c_1)$  и  $S_2 = S(r_2, c_2)$  переводятся одна в другую одной или двумя инверсиями относительно псевдосфер, а именно — отражениями в гиперплоскостях,  $q$ -ортогональных псевдосферам  $S' = r_2 s_{r_1, c_1} + r_1 s_{r_2, c_2}$  и  $S'' = r_2 s_{r_1, c_1} - r_1 s_{r_2, c_2}$ , по меньшей мере одна из которых является настоящей сферой или гиперплоскостью. Обе сферы  $S'$  и  $S''$  обладают этим свойством если и только если ограничение формы  $q$  на порождённое на сферами  $S_1$  и  $S_2$  двумерное подпространство  $\text{span}(S_1, S_2) \subset \Sigma$  положительно определено. По п° 22.3.2 это означает, что сферы  $S_1$  и  $S_2$  трансверсально пересекаются. Если  $S_1$  и  $S_2$  не пересекаются или соприкасаются, то форма  $q$  на подпространстве  $\text{span}(S_1, S_2)$  соответственно гиперболична или вырождена, и в этом случае ровно одна из псевдосфер  $S'$  и  $S''$  имеет  $r^2 > 0$ , являясь тем самым настоящей сферой или гиперплоскостью. Мы заключаем, что пересекающиеся сферы переводятся друг в друга ровно двумя различными отражениями в сферах или гиперплоскостях, а не пересекающиеся или соприкасающиеся — ровно одним. Практическое отыскание этих отражений проще всего осуществляется при помощи предл. 22.2, согласно которому сфера  $S_2 = S(r_2, c_2)$  получается инверсией из сферы  $S_1 = S(r_1, c_1)$  если и только если эти сферы гомотетичны. Коэффициент гомотетии, переводящей сферу  $S_1$  в сферу  $S_2$  равен  $r_2/r_1$  или  $-r_2/r_1$ . Так как эта гомотетия переводит  $c_1$  в  $c_2$ , её центр в первом случае находится в точке  $c_- = (r_2 c_1 - r_1 c_2)/(r_2 - r_1)$ , во втором случае — в точке  $c_+ = (r_2 c_1 + r_1 c_2)/(r_2 + r_1)$ . С другой стороны, в силу того же предл. 22.2 радиус  $r_{\pm}$  сферы  $S(r_{\pm}, c_{\pm})$ , инверсия относительно которой переводит  $S_1$  в  $S_2$ , удовлетворяет соотношению  $r_{\pm}^2 = \pm s_{r_1, c_1}(c_{\pm}) r_2 / r_1$ . Если правая часть этого равенства положительна, то мы получаем искомого (псевдо)сферу  $S(r_{\pm}, c_{\pm})$ .

УПРАЖНЕНИЕ 22.10. Убедитесь прямым вычислением, что определитель Грама формы  $q$  на паре сфер  $S_1, S_2$  положителен, обращается в нуль и отрицателен если и только если сферы  $S_1, S_2$  соответственно пересекаются, соприкасаются и не пересекаются.

ПРИМЕР 22.5 (НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ КОМПОЗИЦИИ ИНВЕРСИЙ)

Поскольку инверсия  $\sigma_S : R \rightarrow R$  переставляет между собою точки пересечения параболоида  $R \subset \mathbb{S}$  со всевозможными проходящими через  $S$  прямыми, композиция  $\sigma_2 \circ \sigma_1$  инверсий

<sup>1</sup>См. п° 22.2 на стр. 292.

$\sigma_1 = \sigma_{r_1, c_1}$  и  $\sigma_2 = \sigma_{r_2, c_2}$  относительно различных псевдосфер  $S_1 = S(r_1, c_1)$  и  $S_2 = S(r_2, c_2)$  имеет не более двух неподвижных точек. В самом деле, равенство  $\sigma_2 \sigma_1(p) = p$  равносильно равенству  $\sigma_1(p) = \sigma_2(p)$ , означающему, что обе инверсии одинаково действуют на точку  $p$ . Но инволюции  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  одинаково действуют только на точки пересечения параболоида  $R$  с прямой  $(S_1, S_2)$ . Если  $(S_1, S_2) \cap R = \emptyset$ , что происходит тогда и только тогда, когда сферы  $S_1$  и  $S_2$  трансверсально пересекаются, у композиции  $\sigma_2 \circ \sigma_1$  нет неподвижных точек. Если прямая  $(S_1, S_2)$  касается параболоида  $R$ , что происходит если и только если сферы  $S_1$  и  $S_2$  соприкасаются, композиция  $\sigma_2 \circ \sigma_1$  имеет ровно одну неподвижную точку  $S_1 \cap S_2$ . Если  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ , то композиция  $\sigma_2 \circ \sigma_1$  имеет ровно две неподвижные точки — изотропные векторы ограничения формы  $q$  на  $\text{span}(S_1, S_2)$ . Согласно [прим. 22.3](#) на стр. 294, матрица Грама этого ограничения в базисе  $S_1, S_2$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} r_1^2 & (r_1^2 + r_2^2 - \ell^2)/2 \\ (r_1^2 + r_2^2 - \ell^2)/2 & r_2^2 \end{pmatrix} \tag{22-20}$$

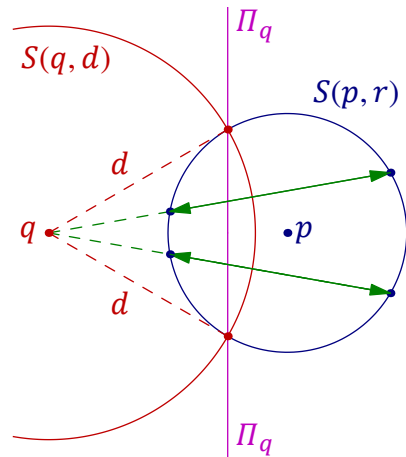
где  $\ell = |c_2 - c_1|$  — расстояние между центрами сфер. Таким образом, неподвижные точки имеют вид

$$\frac{t_1}{t_1 + t_2} c_1 + \frac{t_2}{t_1 + t_2} c_2,$$

где  $(t_1 : t_2)$  — любое из двух непропорциональных решений уравнения

$$r_1^2 t_1^2 + (r_1^2 + r_2^2 - \ell^2) t_1 t_2 + r_2^2 t_2^2 = 0.$$

**22.5.2. Мёбиусова группа сферы.** Стандартная единичная  $n$ -мерная сфера  $S = S(1, 0)$  задаётся в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$  с координатами  $(x_1, \dots, x_{n+1})$  уравнением  $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$ . Её проективное замыкание в пространстве  $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+2})$  с однородными координатами  $(x_0 : x_1 : \dots : x_{n+1})$  задаётся квадратичной формой  $-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$  сигнатуры  $(n + 1, 1)$ . Мы заключаем, что группа Мёбиуса  $M_n$  изоморфна группе проективных преобразований пространства  $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ , переводящих в себя единичную сферу  $S \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ . В такой реинкарнации эта группа называется *мёбиусовой группой  $n$ -мерной сферы* и обозначается  $M(S^n)$ . По [лем. 22.2](#) на стр. 301 группа  $M(S^n)$  порождается отражениями в гиперплоскостях, полярных точкам, лежащим снаружи от сферы  $S = S^n$ . Каждое такое отражение  $\sigma_q : S \rightarrow S$  действует на сфере как инволюция, переставляющая между собою точки пересечения сферы  $S$  со всевозможными проходящими через  $q$  прямыми<sup>1</sup>. Она называется *инверсией сферы  $S$* , а точка  $q$  — *центром инверсии  $\sigma_q$* . Инверсия с центром  $q$  тождественно действует на  $(n - 1)$ -мерной сфере  $S \cap \Pi_q$ , высекаемой из  $S$  полярной гиперплоскостью  $\Pi_q$  точки  $q$ . Она совпадает с ограничением на  $S$  инверсии  $\sigma_Q : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$  всего пространства  $\mathbb{R}^n$  относительно сферы  $Q = S(t, q)$ , перпендикулярно пересекающей сферу  $S$  по неподвижной относительно  $\sigma_q$  сфере  $S \cap \Pi_q$ . Сфера  $Q$  имеет центр в точке  $q$  и квадрат радиуса  $t^2 = s_{r,c}(q) = |q - c|^2 - r^2$ , равный степени точки  $q$  относительно сферы  $S$ , см. [рис. 22◊14](#).



**Рис. 22◊14.** Инверсия  $\sigma_q : S(p, r) \rightarrow S(p, r)$ .

<sup>1</sup>Ср. с [прим. 17.5](#) на стр. 233.

Представления мёбиусовой группы  $M_n = \text{PO}(n+1, 1)$  в виде мёбиусовой группы сферы  $M(S^n)$  и в виде мёбиусовой группы евклидова пространства  $M(\mathbb{R}^n)$  связаны друг с другом посредством стереографической проекции.

**22.5.3. Стереографическая проекция** проекция сферы  $S = S(r, c)$  из лежащей на ней точки  $p$  на проходящую через центр сферы перпендикулярно вектору  $p - c$  экваториальную гиперплоскость  $E_p = \{x \mid (x - c, p - c) = 0\}$

$$\pi_p : S(r, c) \setminus p \rightarrow E_p \quad (22-21)$$

является ограничением на сферу  $S$  инверсии  $\sigma_Q$  относительно пересекающей сферу  $S$  по её экватору  $E_p \cap S$  сферы  $Q$  радиуса  $r\sqrt{2}$  с центром в точке  $p$ , см. рис. 22◊15. Таким образом, стереографическая проекция переводит каждую лежащую на  $S$  сферу  $S' = \Gamma \cap S$ , высекаемую из  $S$  какой-либо гиперплоскостью  $\Gamma$ , в лежащую в гиперплоскости  $E_p$  гиперплоскость или сферу, высекаемую из  $E_p$  образом  $\sigma_Q(\Gamma)$  гиперплоскости  $\Gamma$  при инверсии  $\sigma_Q$ . Последний является гиперплоскостью или сферой: первое происходит, когда гиперплоскость  $\Gamma$  проходит через точку  $p$ , а второе — когда не проходит, и во втором случае полюс  $g$  гиперплоскости  $\Gamma$  относительно сферы  $S$  спроектируется из точки  $p$  в центр сферы  $\pi_p(S') = \sigma_Q(\Gamma) \cap E_p$ .

УПРАЖНЕНИЕ 22.11. Убедитесь в этом (см. рис. 22◊16).

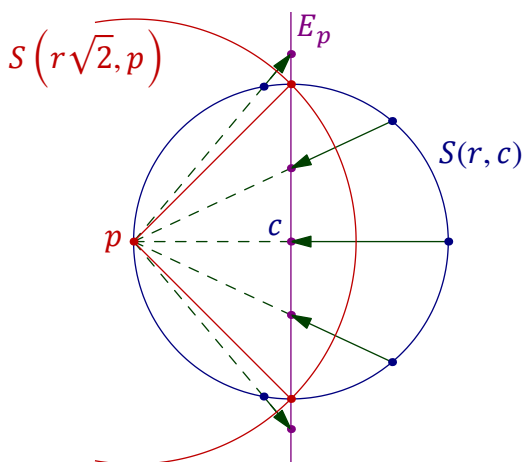


Рис. 22◊15. Стереографическая проекция.

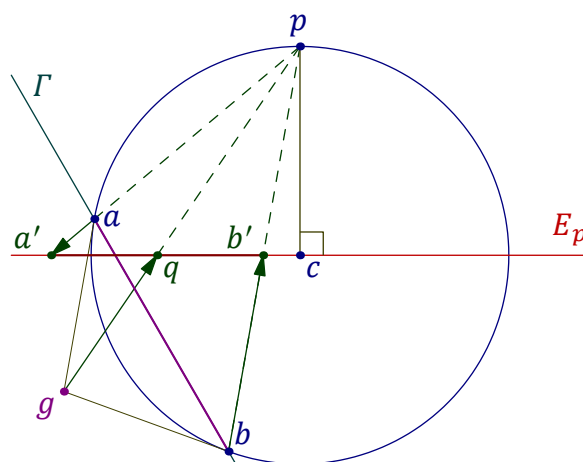


Рис. 22◊16. Соответственные сферы.

Обратно, каждая гиперплоскость  $\Gamma' \subset E_p$  является стереографической проекцией сферы, высекаемой из  $S$  гиперплоскостью  $\Gamma$ , проходящей через  $\Gamma'$  и  $p$ , а каждая сфера  $S'' = S(t, q) \subset E_p$ , пересекающая прямую  $(qc)$  в точках  $a' = \pi_p(a)$  и  $b' = \pi_p(b)$ , как на рис. 22◊16, является стереографической проекцией сферы  $S' = \Gamma \cap S$  с диаметром  $[a, b]$ , высекаемой из  $S$  гиперплоскостью  $\Gamma$ , полюс  $g$  которой проектируется из точки  $p$  в центр  $q$  сферы  $S'$  и которая является прообразом сферы с диаметром  $[a', b']$  при инверсии  $\sigma_Q$ . При этом углы между лежащими на  $S$  сферами равны углам между их образами в гиперплоскости  $E_p$  и наоборот.

Обозначим через  $\hat{E}_p = E_p \sqcup \infty$  одноточечную компактификацию экваториальной гиперплоскости  $E_p$  и будем рассматривать отражения в лежащих внутри  $E_p$  гиперплоскостях как оставляющие на месте точку  $\infty$  инволюции пространства  $\hat{E}_p$ . Продолжим стереографическую проекцию (22-21) до гомеоморфизма

$$\pi_p : S(r, c) \xrightarrow{\cong} \hat{E}_p, \quad p \mapsto \infty, \quad p \neq x \mapsto (px) \cap E_p, \quad (22-22)$$



Предложение 22.3

Полненная стереографическая проекция (22-22) устанавливает биекцию между инверсиями сферы  $S = S(r, c)$  и отражениями пополненного евклидова пространства  $\widehat{E}_p$  в лежащих в нём сферах и гиперплоскостях, переводя каждую инверсию  $\sigma_q : S \rightarrow S$  в композицию

$$\pi_p \sigma_q \pi_p^{-1} : \widehat{E}_p \rightarrow \widehat{E}_p, \quad (22-23)$$

которая является отражением в стереографическом образе лежащей на  $S$  сферы  $\Pi_q \cap S$ , высекаемой полярной гиперплоскостью  $\Pi_q$  точки  $q$  относительно сферы  $S$ .

Доказательство. Композиция (22-23) оставляет на месте каждую точку фигуры  $\Phi = \pi_p(\Pi_q \cap S)$  и действует на точки экваториальной гиперплоскости  $E_p$  как композиция инверсий

$$\sigma_{r\sqrt{2}, p} \sigma_{t, q} \sigma_{r\sqrt{2}, p}^{-1} = \sigma_\psi,$$

которая по сл. 22.4 на стр. 299 представляет собою отражение в псевдосфере  $\Psi = \sigma_{r\sqrt{2}, p}(Q)$ , где  $Q = S(t, q)$  — сфера с центром  $q$  и квадратом радиуса  $t^2 = s_{r, c}(q)$ , как на рис. 22.14 выше. Псевдосфера  $\Psi$  является настоящей сферой, когда  $p \in \Pi_q$ , и гиперплоскостью — когда  $p \notin \Pi_q$ , и  $\Psi \cap E_p = \Phi$ . Поскольку инверсия  $\sigma_\psi$  переводит гиперплоскость  $E_p$  в себя, псевдосфера  $\Psi$  автоматически перпендикулярна гиперплоскости  $E_p$ , и отражение  $\sigma_\psi$  действует на  $E_p$  как отражение  $\sigma_\Phi$ .  $\square$

Упражнение 22.12. Убедитесь напрямую, что инверсия  $\sigma_{r\sqrt{2}, p}$  переводит сферу  $Q$  в перпендикулярную гиперплоскости  $E_p$  гиперплоскость, если  $p \in \Pi_q$ , или в сферу с центром на гиперплоскости  $E_p$ , если  $p \notin \Pi_q$ .

### Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 22.2. Пусть квадррики  $Q = V(q)$  и  $F = V(f)$  пересекают гиперплоскость  $\Pi = \mathbb{P}(\text{Ann } \xi)$  по одной и той же квадрике  $G = V(g) = Q \cap \Pi = F \cap \Pi$ . Поскольку при  $\xi = 0$  обе квадратичные формы  $q, f$  превращаются в квадратичную форму  $g$ , они имеют вид  $q = g + \xi\psi, f = g + \xi\varphi$  для некоторых линейных форм  $\psi, \varphi$ . Но тогда ограничения форм  $q, f$  на гиперплоскость  $\text{Ann}(\psi - \varphi)$ , на которой  $\psi = \varphi$ , тоже совпадают друг с другом.

Упр. 22.3. Первое утверждение очевидно из 22-8 на стр. 292, второе вытекает из лем. 19.1 на стр. 251: простой конус и двойная плоскость имеют в любом пучке кратности  $\geq 1$  и  $\geq n$  соответственно, поэтому никаких других особых квадрик в рассматриваемом пучке больше нет.

Упр. 22.4. Ответ:  $\det \Gamma = \alpha^{n-1}((c, c) - \alpha\beta)$ .

Упр. 22.5. По упр. 22.3 на стр. 292 прямая  $(P_\infty) \subset \mathbb{S}$  представляет собою пучок сфер, концентричных сфере  $S$ .

Упр. 22.6. Сфера  $S = S(r, c)$  и точка  $A = S(0, a)$  имеют приведённые уравнения  $(x, x) - 2(x, c) + (c, c) - r^2 = 0$  и  $(x, x) - 2(x, a) + (a, a) = 0$ . Согласно прим. 22.3 на стр. 294  $\varrho(S) = r^2$  и  $2\bar{\varrho}(A, S) = r^2 - (a - c, a - c) = -s_{r,c}(a)$ . Поэтому приведённое уравнение одноточечной сферы  $\sigma_S(A) = r^2 \cdot A + s_{r,c}(a) \cdot S$  является барицентрической комбинацией приведённых уравнений для  $A$  и  $S$  с весами  $r^2/(a - c, a - c)$  и  $s_{r,c}(a)/(a - c, a - c)$ .

Упр. 22.8. Первое проверяется прямым вычислением, второе вытекает из сл. 22.4 на стр. 299: инверсия  $\sigma$  относительно  $S$  переводит инверсные относительно  $Q$  точки  $c$  и  $c'$  в точки  $\infty$  и  $\sigma_S(c')$  инверсные относительно  $Q'$ .

Упр. 22.10. Согласно прим. 22.3 на стр. 294 и форм. (22-20) на стр. 303 определитель Грама псевдосфер  $S_1, S_2$  относительно формы  $\varrho$  равен

$$\begin{aligned} r_1^2 r_2^2 - (r_1^2 + r_2^2 - \ell^2)^2 / 4 &= (r_1^4 + r_2^4 + \ell^4 - 2r_1^2 r_2^2 - 2r_1^2 \ell^2 - 2\ell^2 r_2^2) / 4 = \\ &= -(r_1 + r_2 + \ell)(-r_1 + r_2 + \ell)(r_1 - r_2 + \ell)(r_1 + r_2 - \ell) / 4, \end{aligned}$$

где  $\ell = |c_2 - c_1|$  — расстояние между центрами сфер.

Упр. 22.11. На рис. 22♦16 на стр. 304 проекция прямой  $(ab)$  на прямую  $(a'b')$  из точки  $p$  сохраняет двойные отношения. Обозначим через  $e$  и  $f$  точки пересечения прямой  $(ab)$  соответственно с прямой  $(pg)$  и с касательной гиперплоскостью к сфере в точке  $p$ . Тогда  $[\infty, q, a', b'] = [e, f, a, b] = -1$ , поскольку точки  $e$  и  $f$  сопряжены относительно сферы  $S(r, c)$ . Таким образом, точка  $g$  спроектируется из  $p$  в середину отрезка  $[a, b]$ .