§20. Конформная геометрия вещественных коник

20.1. Комплексная проективизация вещественной плоскости. Всюду в этом параграфе мы рассматриваем координатную плоскость $V = \mathbb{R}^2$ со стандартными координатами (x_1, x_2) как множество вещественных точек комплексной координатной плоскости $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$, вложенной в качестве стандартной аффинной карты $U_0 = e_0 + V_{\mathbb{C}}$ в проективную плоскость $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$. Бесконечно удалённую прямую $x_0 = 0$ карты U_0 мы называем *бесконечностью* и обозначаем $\ell_\infty = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$. Точками этой прямой являются ненулевые векторы пространства $V_{\mathbb{C}}$, рассматриваемые с точностью до умножения на ненулевые комплексные константы. Мы будем называть их *комплексными направлениями* в карте U_0, поскольку выпущенная из произвольной точки $p \in U_0$ вдоль вектора $v \in V_{\mathbb{C}}$ комплексная аффинная прямая $\{p + tv \mid t \in \mathbb{C}\}$ представляет собою видимую в карте U_0 часть проективной прямой $(pv) \subset \mathbb{P}_2$, соединяющей точку p с бесконечно удалённой точкой $v \in \ell_\infty = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{P}_2$.

На комплексной проективной плоскости $\mathbb{P}_2$ имеется комплексно полулинейная[1] инволюция *комплексного сопряжения* $\sigma : (x_0 : x_1 : x_2) \leftrightarrow (\overline{x}_0 : \overline{x}_1 : \overline{x}_2)$. Она переводит прямые в прямые, а коники — в коники и сохраняет стандартную аффинную карту $U_0 \subset \mathbb{P}_2$, действуя на ней комплексно полуаффинным[2] веществнно аффинным преобразованием. Точки, прямые и коники, переводящиеся комплексным сопряжением в себя, называются *вещественными*. Например, бесконечно удалённая прямая $x_0 = 0$ и коника $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ вещественны. Обратите внимание, что у вещественной фигуры может не быть ни одной вещественной точки.

Поскольку линейное уравнение, задающее прямую, и квадратичное уравнение, задающее гладкую конику, однозначно с точностью до умножения на ненулевое комплексное число определяются этими геометрическими фигурами, вещественность прямой или коники означает, что каждый коэффициент a её уравнения удовлетворяют соотношению $\overline{a} = \lambda a$ с одним и тем же для всех коэффициентов a ненулевым множителем $\lambda \in \mathbb{C}$. Так как $|\overline{a}| = |a|$, мы заключаем, что $|\lambda| = 1$. Полагая $\lambda = \vartheta^2$, видим, что $\overline{\vartheta a} = \vartheta^{-1}\overline{a} = \vartheta a \in \mathbb{R}$. Таким образом, вещественность прямой или коники на $\mathbb{P}_2$ равносильна тому, что в стандартных координатах $(x_0 : x_1 : x_2)$ эти фигуры можно задать уравнениями с вещественными коэффициентами.

20.1.1. Конформная структура. Евклидово скалярное произведение на $V = \mathbb{R}^2$, рассматриваемое с точностью до умножения на положительную вещественную константу, называется *конформной структурой* на вещественной плоскости V. Всюду далее мы предполагаем, что конформная структура такова, что стандартный базис в $\mathbb{R}^2$ является для неё ортонормальным с точностью до гомотетии. Конформная структура не позволяет сказать, что такое длина вектора, но даёт возможность определить угол $\vartheta = \measuredangle(u, w)$ между вещественными прямыми с направляющими векторами $u, w \in V$ по формулам

$$\cos\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} = \frac{(u, w)}{\sqrt{(u, u)(w, w)}}\,, \quad \sin\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i} = \frac{\det(u, w)}{\sqrt{(u, u)(w, w)}}\,, \qquad (20\text{-}1)$$

где $\det(u, w)$ означает определитель матрицы координат векторов u и w в ортонормальном базисе евклидова пространства $V = \mathbb{R}^2$. Обратите внимание, что при умножении евклидова скалярного произведения в $\mathbb{R}^2$ на положительную вещественную константу правые части обеих

[1] Т. е. $\sigma(u + w) = \sigma(u) + \sigma(w)$ для всех $u, w \in \mathbb{C}^3$, но $\sigma(zv) = \overline{z}\sigma(v)$ для всех $z \in \mathbb{C}$ и $v \in \mathbb{C}^3$, см. n° 2.1.3 на стр. 26.

[2] См. n° 2.1 на стр. 24.

формул не меняются. С геометрической токи зрения конформная структура представляет собою гладкую вещественную квадрику на бесконечно удалённой прямой $\ell_\infty = \mathbb{P}(V_\mathbb{C})$, задаваемую уравнением $x_1^2 + x_2^2 = 0$ и состоящую из комплексных изотропных векторов

$$\iota_+ = (i : 1) = (1 : -i) \quad \text{и} \quad \iota_- = (-i : 1) = (1 : i) \tag{20-2}$$

евклидовой формы, продолженной с $\mathbb{R}^2$ до комплексно билинейной формы на $\mathbb{C}^2$. Мы будем называть точки (20-2) *изотропными направлениями*.

Пример 20.1 (евклидова перпендикулярность)
Сопоставление направлению $v \in \ell_\infty$ евклидово перпендикулярного направления $v^\perp$ задаёт на прямой ℓ_∞ инволютивную гомографию с неподвижными точками $\iota_\pm$. Она называется *перпендикулярностью*. Равенство $(u, w) = 0$ в $V_\mathbb{C}$ означает гармоничность направлений $u, w \in \ell_\infty$ изотропным направлениям: $[u, w, \iota_+, \iota_-] = -1$.

Пример 20.2 (угол как двойное отношение)
Так как для вещественных направлений $u, w \in \mathbb{R}^2$ двойное отношение $[u, w, \iota_+, \iota_-] \in \mathbb{C}$ сопряжено своему обратному: $\overline{[u, w, \iota_+, \iota_-]} = [\overline{u}, \overline{w}, \overline{\iota}_+, \overline{\iota}_-] = [u, w, \iota_-, \iota_+] = [u, w, \iota_+, \iota_-]^{-1}$, оно лежит на единичной окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, т. е. $[u, w, \iota_+, \iota_-] = e^{i\varphi}$ для некоторого $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Выясним, как связан этот угол φ с евклидовым углом $\vartheta = \measuredangle(u, w)$ между векторами u и w в $\mathbb{R}^2$ из формул (20-1). Пусть $u = \iota_+ + \lambda\iota_-$, $w = \iota_+ + \mu\iota_-$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Тогда

$$[u, w, \iota_+, \iota_-] = \frac{\det(u, \iota_+)\det(w, \iota_-)}{\det(w, \iota_+)\det(u, \iota_-)} = \frac{\lambda\det(\iota_-, \iota_+)\det(\iota_+, \iota_-)}{\mu\det(\iota_-, \iota_+)\det(\iota_+, \iota_-)} = \frac{\lambda}{\mu}\,.$$

Поскольку евклидова матрица Грама и определитель векторов $\iota_\pm$ суть

$$G_{(\iota_+, \iota_-)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(\iota_+, \iota_-) = \det\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2i\,,$$

скалярные произведения $(u, w) = 2(\lambda + \mu)$, $(u, u) = 4\lambda$, $(w, w) = 4\mu$ и по формулам (20-1)

$$\frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} = \frac{\sqrt{\lambda/\mu} + \sqrt{\mu/\lambda}}{2} = \frac{e^{i\varphi/2} + e^{-i\varphi/2}}{2}$$
$$\frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i} = \frac{\sqrt{\lambda/\mu} - \sqrt{\mu/\lambda}}{2i} = \frac{e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2}}{2i}\,,$$

откуда $\vartheta = \varphi/2$, т. е. ориентированный евклидов угол между вещественными направлениями $u, w \in \ell_\infty$ равен половине аргумента их двойного отношения с изотропными направлениями:

$$\measuredangle(u, w) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Arg}[u, w, \iota_+, \iota_-]\,. \tag{20-3}$$

20.2. Гладкие непустые вещественные коники. Гладкая непустая вещественная коника называется *параболой*, если она касается прямой ℓ_∞, и называется *гиперболой* или *эллипсом*, если она пересекает прямую ℓ_∞ по двум различным, соответственно, вещественным или комплексно сопряжённым друг другу точкам. Точки пересечения $\{a', a''\}$ коники с бесконечностью называются *асимптотическими направлениями* этой коники. Таким образом, парабола имеет ровно одно, автоматически вещественное асимптотическое направление, которое также называют *направлением оси* параболы. Это же направление является полюсом прямой ℓ_∞ относительно параболы, см. рис. 20⋄1. Гипербола имеет два различных вещественных асимптотических направления, а эллипс — два различных комплексно сопряжённых друг другу асимптотических направления, см. рис. 20⋄2. Полюс z_* прямой ℓ_∞ относительно не являющейся параболой коники C называется *центром* коники C. Он лежит в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ и является центром симметрии аффинной части коники, так как по предл. 18.1 на стр. 238 на любой проходящей через z_* прямой, пересекающей конику в точках b, d, а бесконечность в точке p, двойное отношение $[p, z_*, b, d] = -1$, т. е. z_* является серединой отрезка $[b, d]$ в аффинной карте, для которой $p = \infty$. По этой причине эллипсы и гиперболы в совокупности называются *центральными кониками*. Проходящие через центр прямые называются *диаметрами* центральной коники C. Касательные диаметры $(z_* a')$ и $(z_* a'')$, идущие из центра в асимптотических направлениях, называются *асимптотами*. Гипербола имеет вещественные асимптоты, эллипс — невещественные комплексно сопряжённые.

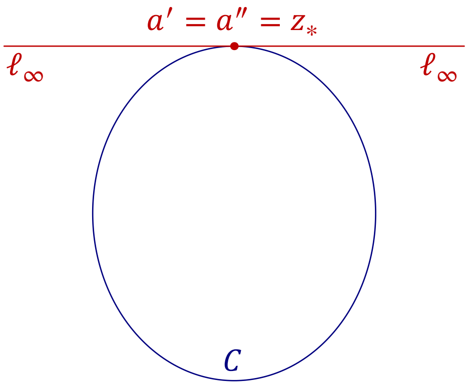

Рис. 20⋄1. Парабола.

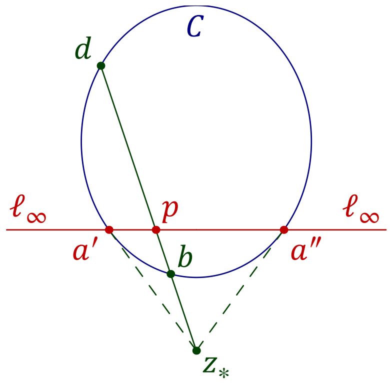

Рис. 20⋄2. Центральная коника.

Упражнение 20.1. Покажите, что любой диаметр центральной коники делит пополам все хорды, параллельные[1] сопряжённому диаметру.

Если коника C задаётся в стандартном ортонормальном базисе в $\mathbb{R}^2$ неоднородным уравнением

$$f(x_1, x_2) = \beta_{11}x_1^2 + 2\beta_{12}x_1x_2 + \beta_{22}x_2^2 + 2\,\beta_{01}x_1 + 2\,\beta_{02}x_2 + \beta_{00} = 0\,, \tag{20-4}$$

то её проективное замыкание[2] имеет в однородных координатах $(x_0 : x_1 : x_2)$ на $\mathbb{P}_2$ матрицу Грама

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{00} & \beta_{01} & \beta_{02} \\ \beta_{01} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{02} & \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix}. \tag{20-5}$$

Невырожденность коники C означает, что $\det B \neq 0$, а непустота — что сигнатура отлична от $(3, 0)$ и $(0, 3)$, т. е. что последовательность знаков главных нижних угловых миноров

$$\varDelta_2 \overset{\text{def}}{=} \beta_{22}\,, \quad \varDelta_{12} \overset{\text{def}}{=} \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2\,, \quad \varDelta_{012} \overset{\text{def}}{=} \det B$$

[1] По определению, прямые *параллельные* данной $\ell \subset \mathbb{P}_2$ суть все прямые из пучка с центром в точке $\ell \cap \ell_\infty$, за исключением самих прямых ℓ и ℓ_∞.

[2] См. n° 16.4.3 на стр. 216.

отлична от $+++$ и $-+-$. Асимптотические направления $\{a', a''\} = C \cap \ell_\infty$ коники C суть корни однородной квадратичной формы от (x_1, x_2) с матрицей Грама

$$B_\infty = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix} . \tag{20-6}$$

Гладкая непустая вещественная коника C является является эллипсом, параболой или гиперболой если и только если определитель[1] $\Delta_{12} = \det B_\infty$, соответственно, положителен, равен нулю или отрицателен. Однородные координаты полюса $z_* = (z_0 : z_1 : z_2)$ бесконечно удалённой прямой $x_0 = 0$ удовлетворяет уравнению $(z_0 : z_1 : z_2)B = (1 : 0 : 0)$, т. е. пропорциональны первой строке присоединённой матрицы $B^\vee$ к матрице Грама B коники C:

$$(z_0 : z_1 : z_2) = (\Delta_{12} : \beta_{12}\beta_{02} - \beta_{01}\beta_{22} : \beta_{01}\beta_{12} - \beta_{11}\beta_{02}) . \tag{20-7}$$

Для центральной коники эта формула позволяет найти аффинные координаты центра в карте U_0:

$$(z_1, z_2) = \left(\frac{\beta_{12}\beta_{02} - \beta_{01}\beta_{22}}{\Delta_{12}}, \frac{\beta_{01}\beta_{12} - \beta_{11}\beta_{02}}{\Delta_{12}} \right) . \tag{20-8}$$

Для параболы $\Delta_{12} = 0$, и формула (20-8) даёт координаты направления оси параболы:

$$(x_1 : x_2) = (\beta_{12}\beta_{02} - \beta_{01}\beta_{22} : \beta_{01}\beta_{12} - \beta_{11}\beta_{02}) . \tag{20-9}$$

20.2.1. Окружности. Сопряжение[2] относительно центральной коники C задаёт на бесконечности инволюцию, неподвижными точками которой являются асимптотические направления коники C. Если эта инволюция совпадает с перпендикулярностью[3], что равносильно совпадению асимптотических направлений коники C с изотропными направлениями[4] $\iota_\pm$, то коника C называется *окружностью*. Это определение согласуется со школьным: проективное замыкание «школьной» окружности радиуса r с центром в точке $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ задаётся на $\mathbb{P}_2$ однородным уравнением $(x_1 - c_1x_0)^2 + (x_2 - c_2x_0)^2 = r^2x_0^2$ и пересекает бесконечно удалённую прямую $x_0 = 0$ в точности по евклидовой квадрике $x_1^2 + x_2^2 = 0$; наоборот, выбирая на непустой гладкой вещественной конике C три вещественные точки[5] p_1, p_2, p_3, видим, что если такая коника проходит через точки $\iota_\pm$, то она совпадает со «школьной» окружностью, проходящей через точки p_1, p_2, p_3, ибо через пять точек проходит ровно одна гладкая коника.

20.2.2. Главные оси центральной коники. Если центральная коника C не является окружностью, то согласно сл. 17.4 на стр. 234 существуют ровно два направления $x_*, y_* \in \ell_\infty$, одновременно перпендикулярные друг другу и сопряжённые относительно коники C. Эти направления автоматически различны, поскольку равенство $x_* = y_*$ означает, что эта точка совпадает с одной из точек $\iota_\pm$, а вещественная коника, проходящая через одну из точек $\iota_\pm$ автоматически проходит и через комплексно сопряжённую ей вторую точку $\iota_\mp$, а значит, является окружностью. Перпендикулярные сопряжённые друг другу относительно C направления называются

[1] Противоположный по знаку дискриминанту бинарной квадратичной формы с матрицей Грама B_∞, см. прим. 14.1 на стр. 189 и прим. 16.6 на стр. 211.

[2] См. n° 18.1.2 на стр. 238.

[3] См. прим. 20.1 на стр. 263.

[4] См. формулу (20-2) на стр. 263.

[5] Автоматически неколлинеарные!

главными осями коники C. Их легко найти явно: если $x_* = (x_1 : x_2)$, то $y_* = (-x_2 : x_1)$ в силу перпендикулярности, а сопряжённость относительно C означает, что

$$0 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \beta_{12} x_1^2 - (\beta_{11} - \beta_{22}) x_1 x_2 - \beta_{12} x_2^2 , \tag{20-10}$$

откуда

$$x_* = \left(\beta_{11} - \beta_{22} + \sqrt{D} : 2\beta_{12}\right), \quad y_* = \left(\beta_{11} - \beta_{22} - \sqrt{D} : 2\beta_{12}\right), \\ \text{где } D = (\beta_{11} - \beta_{22})^2 + 4\beta_{12}^2 . \tag{20-11}$$

Упражнение 20.2. Убедитесь, что x_* и y_* являются собственными векторами симметричной матрицы B_∞ из формулы (20-6) с собственными числами, соответственно, равными[1]

$$(\beta_{11} + \beta_{22} + \sqrt{D})/2 \quad \text{и} \quad (\beta_{11} + \beta_{22} - \sqrt{D})/2 .$$

Поскольку центр z_* является полюсом прямой $\ell_\infty = (x_* y_*)$, треугольник $\triangle\, x_* y_* z_*$ автополярен относительно коники C. Таким образом, матрица Грама коники C в базисе x_*, y_*, z_* диагональна, и в аффинном координатном репере карты U_0 с началом в точке z_* и евклидово перпендикулярными базисными векторами x_* и y_* коника C задаётся неоднородным уравнением вида

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$$

где $\alpha = -f(x_*)/f(z_*)$, $\beta = -f(y_*)/f(z_*)$, а $f(x_1, x_2)$ — исходный неоднородный многочлен (20-4), задающий конику C.

20.3. Геометрия центральных коник. Точка $f \in \mathbb{P}_2 \smallsetminus \ell_\infty$ называется *фокусом* центральной коники $C \subset \mathbb{P}_2$, если обе прямые $(f\iota_+)$ и $(f\iota_-)$ касаются коники C. Поляры фокусов относительно коники C называются *директрисами* этой коники. Таким образом, отличная от окружности центральная коника имеет четыре различных фокуса, см. рис. 20◇3.

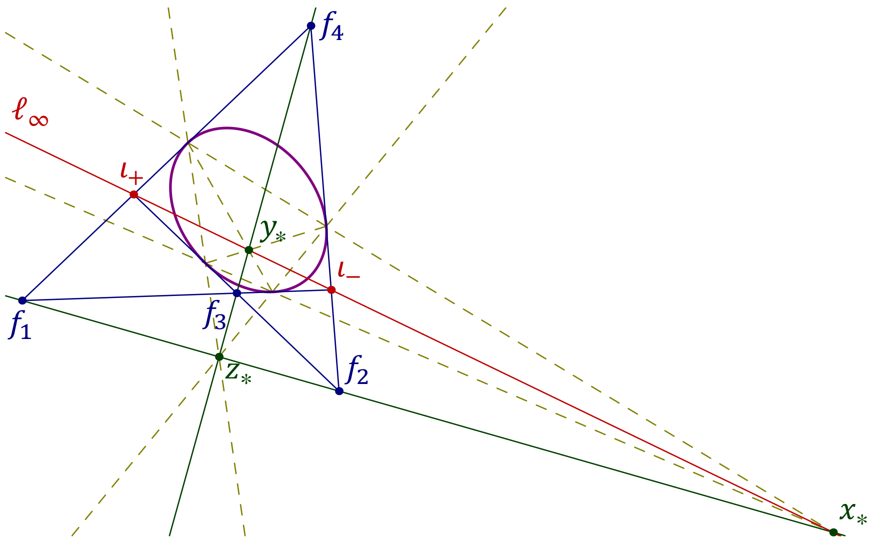

Рис. 20◇3. Фокусы, директрисы и главные оси центральной коники.

[1] Эти числа суть корни характеристического многочлена $\lambda^2 - (\beta_{11} + \beta_{22})\lambda + \Delta_{12}$ матрицы B_∞. Обратите внимание, что он имеет тот же дискриминант $D = (\beta_{11} + \beta_{22})^2 - 4(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2) = (\beta_{11} - \beta_{22})^2 + 4\beta_{12}^2$, что и многочлен (20-10).

Комплексное сопряжение переставляет между собою изотропные направления $\iota_\pm$ и переводит касательные ℓ_1, ℓ_2, опущенные на C из ι_+, в касательные $\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2$, опущенные из $\iota_- = \overline{\iota}_+$. Поэтому фокусы $f_1 \stackrel{\text{def}}{=} \ell_1 \cap \overline{\ell}_1$ и $f_2 \stackrel{\text{def}}{=} \ell_2 \cap \overline{\ell}_2$ вещественны, а фокусы $f_3 \stackrel{\text{def}}{=} \ell_1 \cap \overline{\ell}_2$ и $f_4 \stackrel{\text{def}}{=} \ell_2 \cap \overline{\ell}_1$ невещественны и комплексно сопряжены друг другу. Обозначим через $\triangle\ x_* y_* z_*$ автополярный относительно C треугольник, ассоциированный с вписанным в конику C четырёхвершинником[1], который образован точками касания с C четырёх фокальных касательных. Так как точка x_* лежит на полярах фокусов f_3 и f_4, прямая $(f_3 f_4)$ является полярой точки x_* и, стало быть, совпадает с прямой $(y_* z_*)$. По той же причине прямая $(f_1 f_2)$ совпадает с прямой $(x_* z_*)$, а прямая $(\iota_+ \iota_-) = \ell_\infty$ — с прямой $(x_* y_*)$, см. рис. 20◇3. Таким образом, прямые $(f_1 f_2)$ и $(f_3 f_4)$ пересекаются в центре z_* коники C и пересекают бесконечность в точках $x_* = \ell_\infty \cap (f_1 f_2)$ и $y_* = \ell_\infty \cap (f_2 f_3)$, которые являются главными осями коники C, ибо $[x_*, y_*, \iota_+, \iota_-] = -1$, так как в пучке прямых с центром в фокусе f_1 касательные прямые $(f_1 \iota_+)$ и $(f_1 \iota_-)$ гармоничны сопряжённым относительно C прямым[2] $(f_1 x_*)$ и (f_1, y_*).

Упражнение 20.3. Покажите, что пересекающиеся в точке y_* пунктирные прямые на рис. 20◇3 проходят через фокусы f_1 и f_2.

Упражнение 20.4. Что представляют собою фокусы и директрисы окружности?

Пример 20.3
Выясним тип коники C, задаваемой в стандартных координатах на $\mathbb{R}^2$ уравнением

$$-2x_1^2 + 12x_1x_2 - x_2^2 + 10x_1 - 6x_2 = 4\,, \tag{20-12}$$

и найдём её центр, асимптоты и главные оси. Проективное замыкание коники C задаётся в $\mathbb{P}_2$ однородным уравнением $-4x_0^2 + 10x_0x_1 - 6x_0x_2 - 2x_1^2 + 12x_1x_2 - x_2^2 = 0$ с матрицей Грама

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -3 \\ 5 & -2 & 6 \\ -3 & 6 & -1 \end{pmatrix}. \tag{20-13}$$

По форм. (20-8) на стр. 265 однородные координаты центра суть

$$\left(\det\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} : -\det\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} : \det\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\right) = (-38 : -13 : 24)\,,$$

а аффинные координаты центра в стандартном базисе $\mathbb{R}^2$ равны $(z_1, z_2) = (13/38, -12/19)$. Пересечение коники C с бесконечно удалённой прямой $x_0 = 0$ задаётся уравнением

$$2x_1^2 - 12x_1x_2 + x_2^2 = 0\,,$$

которое имеет два вещественных корня $(x_1 : x_2) = \left(2 : 6 \pm \sqrt{34}\right)$. Поэтому коника C является гиперболой, и её асимптоты задаются в стандартных координатах на $\mathbb{R}^2$ уравнениями $(6 \pm \sqrt{34})(x_1 - 13/38) = 2(x_2 + 12/19)$. Направления главных осей коники C являются корнями уравнения из форм. (20-11) на стр. 266: $6x_1^2 + x_1x_2 - 6x_2^2 = 0$ и равны $\left(12 : -1 \pm \sqrt{145}\right)$.

[1] См. прим. 17.6 на стр. 234 и прим. 19.1 на стр. 254.
[2] См. сл. 18.1 на стр. 238.

Пример 20.4
Центр и главные оси центральной коники, заданной аффинным уравнением

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1\,, \quad \text{где} \quad \alpha > 0\,, \tag{20-14}$$

имеют однородные координаты $z_* = (1 : 0 : 0)$, $x_* = (0 : 1 : 0)$, $y_* = (0 : 0 : 1)$. Точка $f = z_* + t x_* \in (z_* x_*)$ является фокусом если и только если ограничение однородного уравнения коники на прямую $(f\iota_+)$ вырождено. Это ограничение имеет в базисе f, ι_+ матрицу Грама

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha t^2 - 1 & i\alpha t \\ i\alpha t & \beta - \alpha \end{pmatrix}$$

с определителем $\alpha\beta\, t^2 + \beta - \alpha$, который зануляется при $t = \pm\sqrt{\alpha^{-1} - \beta^{-1}}$. Таким образом, два лежащих на оси $(z_* x_*)$ фокуса коники (20-14) имеют аффинные координаты $(\pm\sqrt{\alpha^{-1} - \beta^{-1}}, 0)$. Симметричным образом, два лежащих на перпендикулярной оси $(z_* y_*)$ фокуса имеют аффинные координаты $(0, \pm\sqrt{\beta^{-1} - \alpha^{-1}})$. При $\beta > \alpha$ или $\beta < 0$ первые два фокуса вещественны, а вторые — чисто мнимы и комплексно сопряжены, при $0 < \beta < \alpha$ всё наоборот. При $\beta < 0$ коника (20-14) является гиперболой, при $0 < \beta < \alpha$ и $\beta > \alpha$ — эллипсом. При $\alpha = \beta$ коника превращается в окружность и все четыре фокуса сливаются с её центром. У эллипса и гиперболы, заданных на евклидовой плоскости своими стандартными аффинными уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \quad \text{в которых } \alpha = \frac{1}{a^2}\,,\ \beta = \frac{1}{b^2}\,,\ a, b \in \mathbb{R}\,,$$

вещественные фокусы располагаются так, как показано на рис. 20◇4 и рис. 20◇5.

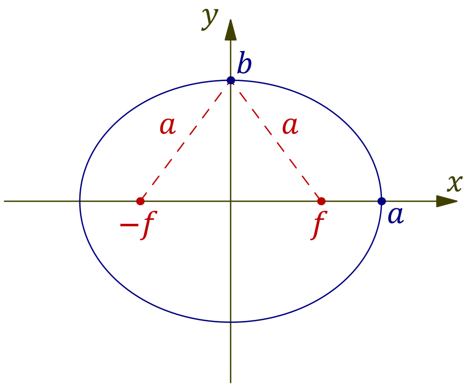

Рис. 20◇4. Вещественные фокусы эллипса.

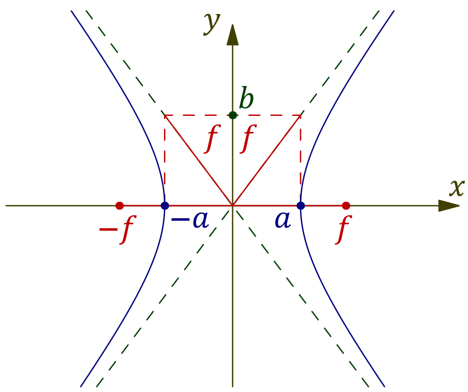

Рис. 20◇5. Вещественные фокусы гиперболы.

20.3.1. Директор центральной коники. Сопряжение относительно центральной коники C задаёт гомографию $\delta_C : \iota_+^\times \simeq \iota_-^\times$ между пучками прямых с центрами в точках $\iota_\pm$. Она переводит прямую $\ell \ni \iota_+$ в сопряжённую ей относительно C прямую $\delta_C(\ell) \ni \iota_-$, см. рис. 20◇6. Пусть точка $p = \ell \cap \delta_C(\ell)$ является точкой пересечения соответственных прямых[1]. На пучке $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ всех проходящих через p прямых коника C также задаёт инволюцию, переставляющую между собою

[1] На рис. 20◇6 показаны три такие точки: p_1, p_2 и p_3.

сопряжённые относительно C прямые. Так как неподвижными точками этой инволюции являются две опущенные из p на C касательные, сопряжённые относительно C прямые $(p\iota_-)$ и $(p\iota_+)$ гармоничны[1] в пучке $p^\times$ паре касательных, опущенных из p на C. Стало быть, эти касательные перпендикулярны. Наоборот, если точка $p \in \mathbb{P}_2$ такова, что опущенные из неё на конику C касательные перпендикулярны, т. е. гармоничны прямым $(p\iota_+)$ и $(p\iota_-)$, то последние две прямые сопряжены друг другу относительно коники C, т. е. переводятся друг в друга гомографией $\delta_C : \iota_+^\times \xrightarrow{\sim} \iota_-^\times$. Мы заключаем, что ГМТ пересечения соответственных прямых $\ell \cap \delta_C(\ell)$ совпадает с ГМТ $p \in \mathbb{P}_2$, из которых коника C видна под прямым углом.

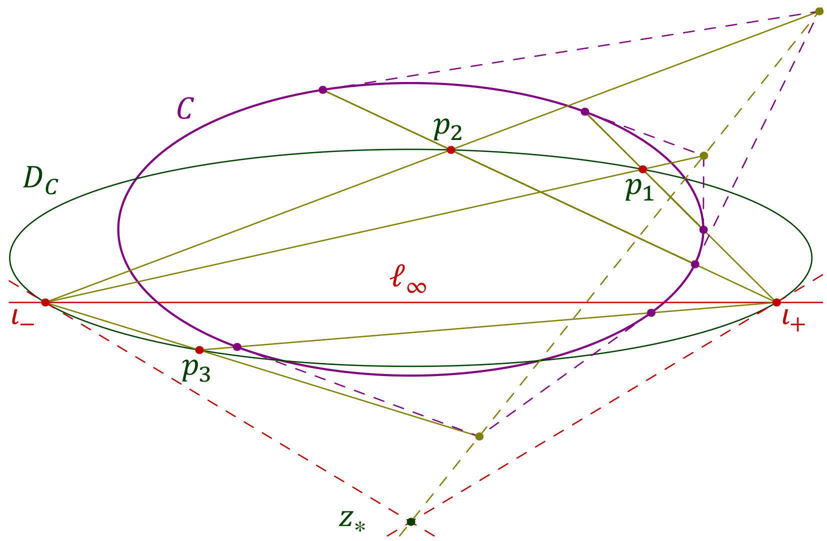

Рис. 20⋄6. Директор центральной коники.

Согласно предл. 17.2 на стр. 228, ГМТ пересечения соответственных прямых неперспективной гомографии между двумя пучками прямых является гладкой коникой, проходящей через центры пучков, как на рис. 20⋄6. Поскольку в нашем случае центрами пучков служат точки $\iota_\pm$, эта коника — окружность. Она называется *директором* центральной коники C и обозначается D_C. Так как[2] $\delta_C(\ell_\infty) = T_{\iota_-}D_C$ и $\delta_C(T_{\iota_+}D_C) = \ell_\infty$, прямая ℓ_∞ сопряжена относительно коники C обеим касательным к окружности D_C в точках $\iota_\pm$. Следовательно, эти касательные пересекаются в полюсе z_* прямой ℓ_∞ относительно коники C, т. е. директор концентричен C.

Упражнение 20.5. Напишите явное уравнение директора D_C в главных осях коники C.

20.3.2. Софокусные семейства центральных коник. Гладкие вещественные коники с теми же самыми фокусами[3], что и заданная гладкая центральная коника C, лежат в семействе комплексных коник на $\mathbb{P}_2$, касающихся фиксированных четырёх прямых — опущенных из точек $\iota_\pm$ на конику C касательных, см. рис. 20⋄3 на стр. 266. Все эти коники имеют общие центр и главные оси, а двойственные им коники в $\mathbb{P}_2^\times$ образуют простой пучок F коник, проходящих через четыре точки, двойственные прямым

$$(\iota_+ f_1) = (\iota_+ f_4), \quad (\iota_+ f_2) = (\iota_+ f_3), \quad (\iota_- f_2) = (\iota_- f_4), \quad (\iota_- f_1) = (\iota_- f_3). \tag{20-15}$$

[1] См. сл. 18.1 на стр. 238.
[2] См. предл. 17.2 на стр. 228.
[3] Обратите внимание, что для этого достаточно, чтобы два вещественных фокуса были общими.

Три распавшиеся коники этого пучка суть объединения пар прямых, изображающих пучки прямых на $\mathbb{P}_2$, с центрами в точках $\iota_\pm$, $f_{1,2}$ и $f_{3,4}$:

$$\iota_+^\times \cup \iota_-^\times\,, \quad f_1^\times \cup f_2^\times\,, \quad f_3^\times \cup f_4^\times\,. \tag{20-16}$$

Для любой точки $p \in \mathbb{P}_2$ на пучке $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ проходящих через p прямых имеется инволюция Дезарга[1] $\sigma_F : p^\times \xrightarrow{\sim} p^\times$, которая задаётся пучком коник F и переставляет между собою проходящие через p касательные к софокусным с C коникам. Прямая $\ell \ni p$ является неподвижной точкой инволюции σ_F если и только если она касается софокусной с C коники, проходящей через p. Так как инволютивная гомография над полем $\mathbb{C}$ имеет ровно две различные неподвижные точки[2], через любую точку $p \in \mathbb{P}_2$ проходят ровно две софокусные с C коники C'_p, C''_p. Касательные к ним прямые $\ell' = T_pC'_p$ и $\ell'' = T_pC''_p$, будучи неподвижными точками инволюции Дезарга, гармоничны любой паре прямых, переставляемых этой инволюцией. Пересекая прямую $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ с распавшимися кониками (20-16), мы видим, что σ_F переставляет между собою пары прямых

$$(p\iota_+) \overset{\sigma_F}{\leftrightarrow} (p\iota_-)\,, \quad (pf_1) \overset{\sigma_F}{\leftrightarrow} (pf_2)\,, \quad (pf_3) \overset{\sigma_F}{\leftrightarrow} (pf_4)\,.$$

Это приводит к равенству $[\ell', \ell'', (p\iota_+), (p\iota_-)] = -1$, означающему, что неподвижные прямые ℓ' и ℓ'' перпендикулярны[3]. Тем самым, две проходящие через p софокусные C коники пересекаются в точке p под прямым углом, как на рис. 20◇7. Так как инволюция Дезарга сохраняет двойные отношения, $[\ell', (pf_1), (p\iota_+), (p\iota_-)] = [\ell', (pf_2), (p\iota_-), (p\iota_+)] = \overline{[\ell', (pf_2), (p\iota_+), (p\iota_-)]}$, т. е. острые углы, которые прямая ℓ' образует с прямыми (pf_1) и (pf_2) равны друг другу в силу прим. 20.2 на стр. 263. По той же причине равны друг другу и острые углы, которые образует с прямыми (pf_1) и (pf_2) прямая ℓ'', а также острые углы, которые каждая из прямых ℓ', ℓ'' образует с касательными, опущенными из точки p на любую софокусную с C конику. Иначе говоря, перпендикулярные касательные ℓ', ℓ'' к двум проходящим через p софокусным с C коникам являются биссектрисами углов между прямыми (pf_1) и (pf_2), соединяющими точку p с вещественными фокусами, а также биссектрисами углов между двумя касательными прямыми, опущенными из p на любую не проходящую через p софокусную с C конику, см. рис. 20◇7. Мы получаем

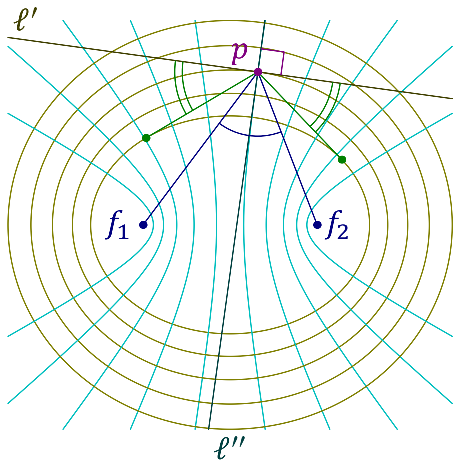

Рис. 20◇7. Софокусные центральные коники.

Предложение 20.1

Для любых точки p и гладкой центральной коники C с вещественными фокусами f_1, f_2 угол между прямой (pf_1) и опущенной из p на C касательной равен углу между второй касательной и прямой (pf_2). □

Предложение 20.2 (фокальное свойство геометрической оптики)

Все отражённые гладкой центральной коникой лучи света от точечного источника в её вещественном фокусе проходят через другой вещественный фокус. □

[1] См. прим. 19.2 на стр. 255.

[2] См. прим. 17.5 на стр. 233.

[3] См. прим. 20.1 на стр. 263.

Пример 20.5

Если центральная коника $C \subset \mathbb{R}^2$ имеет уравнение $ax^2 + by^2 = 1$, то двойственная ей коника $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ задаётся однородным уравнением[1] $-x_0^2 + a^{-1}x_1^2 + b^{-1}x_2^2 = 0$, а распавшаяся коника $\iota_+^\times \cup \iota_-^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ — уравнением $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Натянутый на них пучок коник на $\mathbb{P}_2^\times$ описывается однопараметрическим уравнением $-x_0^2+(a^{-1}+\lambda)\cdot x_1^2+(b^{-1}+\lambda)\cdot x_2^2 = 0$, где $\lambda \in \mathbb{C}$. Двойственные им коники софокусной с C системы коник на $\mathbb{P}_2$ имеют аффинные уравнения

$$\frac{x^2}{a^{-1}+\lambda} + \frac{y^2}{b^{-1}+\lambda} = \frac{ax^2}{1+a\lambda} + \frac{by^2}{1+b\lambda} = 1\,.$$

Упражнение 20.6. Покажите, что из двух пресекающихся в заданной точке коник софокусной системы одна является эллипсом, а другая — гиперболой.

20.3.3. Гипербола Аполлония. Для произвольных точки p и гладкой центральной коники C с центром в точке z_* обозначим через $\varphi : z_*^\times \xrightarrow{\sim} p^\times$ гомографию пучка диаметров коники C в пучок прямых с центром в p, переводящую диаметр $\ell \ni z_*$ в опущенный из точки p перпендикуляр ℓ_p на сопряжённый к ℓ относительно коники C диаметр $\ell' \ni z_*$, см. рис. 20◇8.

Упражнение 20.7. Убедитесь, что это и впрямь гомография.

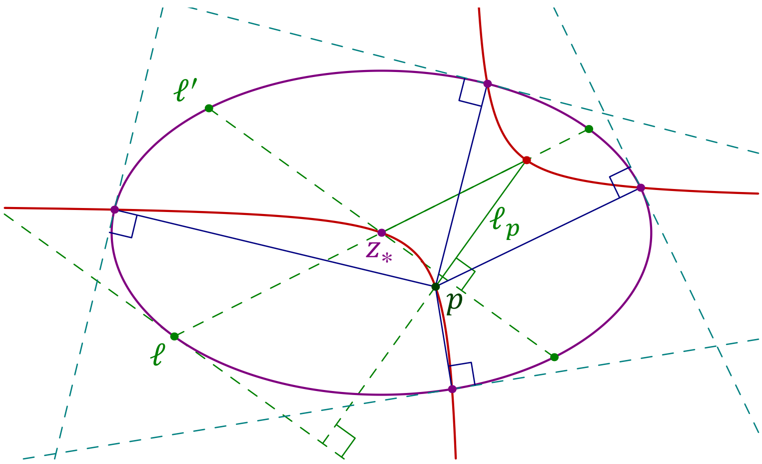

Рис. 20◇8. Гипербола Аполлония точки p относительно эллипса.

Согласно предл. 17.2 на стр. 228, ГМТ пересечения соответственных прямых $\ell \cap \ell_p$ является коникой H, проходящей через центр коники C и точку p. Поскольку гомография φ переводит главные направления (z_*x_*) и (z_*y_*) в прямые (px_*) и (py_*) соответственно, коника H является гиперболой с асимптотами, параллельными главным осям коники C. Она называется *гиперболой Аполлония* точки p относительно коники C и замечательна тем, что пересекает конику C ровно по таким точкам $a \in C$, для которых прямая (pa) перпендикулярна касательной T_aC к конике C в точке a, поскольку сопряжённый к (z_*a) диаметр коники параллелен касательной[2] T_aC, см. рис. 20◇8. В качестве следствия мы заключаем, что из произвольной точки p на гладкую центральную конику C можно опустить не более четырёх перпендикуляров.

[1]См. предл. 18.2 на стр. 238.

[2]Касательные, восстановленные в концах диаметра, пересекаются в его полюсе, лежащем на поляре центра — прямой ℓ_∞. Прямая, соединяющая этот полюс с центром коники — это сопряжённый диаметр.

20.4. Геометрия парабол. Парабола P, касающаяся бесконечности в точке $x_* = \ell_\infty \cap P$, может рассматриваться как результат такого сдвига центральной коники, при котором центр сливается с тремя фокусами f_2, f_3, f_4 в одну точку $x_* \in \ell_\infty$ — направление оси[1] параболы P, см. рис. 20◇9. Директрисы фокусов f_2, f_3, f_4 при этом тоже сливаются друг с другом и превращаются в прямую ℓ_∞. Единственный оставшийся конечный фокус $f = f_1$ называется *фокусом*, а его поляра — *директрисой* параболы P. Конечная точка пересечения параболы с прямой $(x_* f)$ обозначается через z_* и называется *вершиной* параболы. Все они автоматически вещественны. Точки x_* и $y_* = T_c P \cap \ell_\infty$ называются *главными осями* параболы P. Они сопряжены относительно параболы и перпендикулярны. Первое очевидно из рис. 20◇9, второе выражает тот факт, что в пучке прямых с центром в f_1 сопряжённые относительно коники C направления x_*, y_* гармоничны изотропным касательным направлениям.

Упражнение 20.8. Покажите, что середины хорд, высекаемых из параболы любым пучком параллельных прямых, лежат на прямой, параллельной оси параболы.

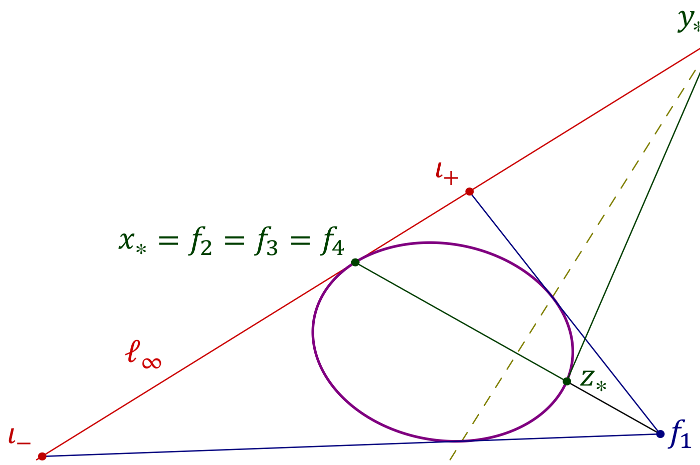

Рис. 20◇9. Фокус, директриса и ось параболы.

Так как анизотропный вектор y_* сопряжён относительно P обеим точкам x_*, z_*, и обе они изотропны, однородное уравнение параболы в базисе x_*, y_*, z_* записывается в виде $y^2 = 2axz$, где $a > 0$. В аффинном репере карты U_0 с началом в z_* и евклидово перпендикулярными осями координат x_*, y_* это уравнение преобразуется в неоднородное уравнение $y^2 = 2ax$.

Упражнение 20.9. Убедитесь, что фокус такой параболы находится в точке $(a/2, 0)$, а директриса задаётся уравнением $x = -a/2$.

Пример 20.6 (отыскание вершины параболы)

Определим тип коники C, заданной в ортонормальном базисе евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ уравнением $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$. Матрица Грама её проективного замыкания

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

[1] См. рис. 20◇2 на стр. 264.

По форм. (20-7) на стр. 265 полюс бесконечно удалённой прямой ℓ_∞ находится в точке

$$x_* = \left(\det\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix} : -\det\begin{pmatrix}2 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix} : \det\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & -2\end{pmatrix}\right) = (0 : -2 : -1) \in \ell_\infty\,.$$

Тем самым, коника является параболой. Её ось параллельна вектору $(2,1) \in \mathbb{R}^2$, т. е. проходит через изотропную точку $x_* = (0 : 2 : 1) \in \ell_\infty$, и является полярой евклидово перпендикулярной к x_* точки $y_* = (0 : -1 : 2) \in \ell_\infty$, т. е. задаётся уравнением $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ с коэффициентами $(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2) = (0 : -1 : 2)\,B = (-8 : -5 : 10)$. Вершина z_* параболы C является второй, отличной от x_*, изотропной точкой квадратичной формы B на оси и может быть получена отражением точки x_* в B-ортогонале к любой лежащей на оси анизотропной точке. Беря в качестве таковой $a = (5,-8,0)$, находим $(5,-8,0)\,B = (-1,2,1)$. Обозначая через β скалярное произведение с матрицей Грама B, получаем

$$\beta(a,x_*) = (-1,2,1)\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = 5\,,\quad \beta(a,a) = (-1,2,1)\begin{pmatrix}5\\-8\\0\end{pmatrix} = -21\,,$$

$$z_* = \sigma_a(x_*) \sim \beta(a,a)\,x_* - 2\beta(a,x_*)\,a = 21\,(0,2,1) + 10\,(5,-8,0) = (50 : -38 : 21)\,.$$

Таким образом, вершина параболы имеет аффинные координаты $(-19/25,\ 21/50)$.

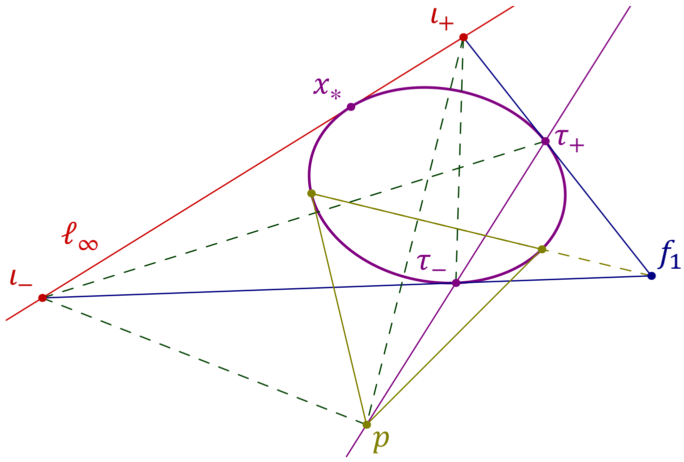

Рис. 20⋄10. Директор параболы совпадает с её директрисой.

Пример 20.7 (директор параболы совпадает с директрисой)
Гомография $\delta_P : \iota_+^\times \rightleftharpoons \iota_-^\times$, задаваемая сопряжением прямых параболой[1] P, перспективна, так как соединяющая центры пучков прямая ℓ_∞ самосопряжена. Поэтому ГМТ пересечения соответственных прямых этой гомографии распадается в объединение[2] прямой ℓ_∞ и прямой, соединяющей точки пересечений каких-нибудь двух пар соответственных прямых. Таковыми являются точки τ_+ и τ_- пересечения параболы с фокальными касательными, см. рис. 20⋄10. Поэтому директриса параболы представляет собою ГМТ, из которых параболу видно под прямым углом[3], т. е. директор параболы.

[1]См. n° 20.3.1 на стр. 268.
[2]См. предл. 17.2 на стр. 228.
[3]Ибо такие точки как раз и являются точками пересечения сопряжённых относительно P прямых, проходящих через $\iota_\pm$, см. n° 20.3.1 на стр. 268.

Следствие 20.1
Касательные к параболе, проведённые через концы любой фокальной хорды, пересекаются на директрисе под прямым углом.

Доказательство. Поскольку полюс p любой фокальной хорды сопряжён фокусу параболы, он лежит на директрисе параболы, см. рис. 20◇10. □

20.4.1. Софокусные параболы. Параболы называются *софокусными*, если у них один и тот же фокус f и параллельные оси[1]. Семейство парабол, софокусных заданной параболе P, состоит из всех коник, вписанных в треугольник $f\iota_-\iota_+$ и касающихся его стороны $\ell_\infty = (\iota_-\iota_+)$ в фиксированной точке x_*. Двойственные им коники образуют в $\mathbb{P}_2^\times$ пучок F с тремя базисными точками[2] — сторонами треугольника $f_1\iota_-\iota_+$. Он порождён двумя распавшимися кониками — объединением пучков $x_*^\times \cup f^\times$ с особой точкой, двойственной оси параболы, и объединением пучков $\iota_+^\times \cup \iota_-^\times$ с особой точкой $\ell_\infty^\times$, которая лежит на прямой $x_*^\times$ и в которой все коники пучка касаются этой прямой. Так же как в n° 20.3.2 для любой точки $p \in \mathbb{P}_2$ пучок коник F задаёт инволюцию Дезарга на прямой $p^\times$ в $\mathbb{P}_2^\times$. Она переставляет между собою касательные к софокусным параболам, в частности, прямые $(p\iota_-)$ и $(p\iota_+)$, а также прямые (px_*) и (pf). Две неподвижные точки инволюции Дезарга суть касательные ℓ' и ℓ'' к софокусным параболам, проходящим через p см. рис. 20◇11.

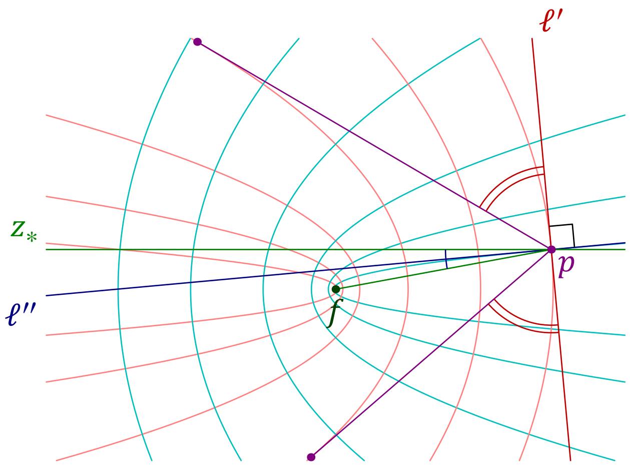

Рис. 20◇11. Софокусные параболы.

Дословно повторяя рассуждения из n° 20.3.2, мы заключаем, что через любую точку $p \in \mathbb{P}_2$ проходят ровно две софокусные параболы, причём они пересекаются в точке p под прямым углом, а касательные к ним в точке p прямые являются биссектрисами углов между прямой (pf) и проходящей через p прямой, параллельной оси параболы, а также углов между двумя касательными, опущенными из p на любую параболу из софокусного семейства.

Предложение 20.3
Для любой точки p угол между касательной, опущенной из p на параболу P, и прямой (pf), ведущей из p в фокус параболы, равен углу между второй касательной и осью параболы. □

[1] Т. е. один и тот же «бесконечно удалённый фокус» x_*.
[2] См. рис. 19◇4 на стр. 254.

Предложение 20.4 (фокальное свойство геометрической оптики)
Все отражённые параболой лучи от точечного источника в её фокусе идут параллельно оси параболы. □

Пример 20.8
Если парабола P задаётся в стандартном ортонормальном базисе евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ каноническим уравнением $y^2 = 2ax$, то двойственная ей коника $P^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ имеет однородное уравнение $2a^{-1}x_0x_1 - x_2^2 = 0$ и порождает вместе с задаваемой уравнением $x_1^2 + x_2^2 = 0$ распавшейся коникой $\iota_+^\times \cup \iota_-^\times$ пучок коник $(1+\lambda)x_2^2 + 2a^{-1}x_0x_1 + \lambda x_1^2 = 0$ на $\mathbb{P}_2^\times$. Двойственные им софокусные с P параболы на $\mathbb{P}_2$ имеют однородные уравнения $(1+\lambda)^{-1}y^2 - 2axz + \lambda z^2 = 0$ и аффинные уравнения $y^2 = (1+\lambda)(2ax - \lambda)$.

20.4.2. Гипербола Аполлония. Дословно также, как в n° 20.3.3, для любой точки p парабола P задаёт гомографию $\alpha_p : x_*^\times \xrightarrow{\sim} p^\times$, переводящую прямую $\ell \ni x_*$ в опущенный из p перпендикуляр на сопряжённую к ℓ относительно параболы P прямую $\ell' \ni x_*$.

Упражнение 20.10. Убедитесь, что ГМТ $\ell \cap \alpha_p(\ell)$ представляет собою проходящую через точку p гиперболу с асимптотами, параллельными осям параболы и пересекающую параболу в точке $x_* \in \ell_\infty$.

Эта гипербола называется *гиперболой Аполлония* точки p относительно параболы P. Она пересекает параболу в таких точках a, что прямая (pa) перпендикулярна касательной T_aP. Поскольку одной из точек пересечения является бесконечно удалённая точка x_*, мы заключаем, что из произвольной точки в $\mathbb{R}^2$ на параболу можно опустить не более трёх перпендикуляров.

Упр. 20.1. Пусть $a, b \in \ell_\infty$ и диаметры (ca), (cb) сопряжены. Тогда a и b сопряжены относительно C, т. е. поляра точки b проходит через a. Так как b лежит на поляре точки z_*, поляра точки b проходит через z_* и совпадает с диаметром (ca). Поэтому любая проходящая через b прямая ℓ пересекает прямую (ca) по сопряжённой с b точке, которая по предл. 18.1 на стр. 238 является серединой отрезка, высекаемого коникой на прямой ℓ.

Упр. 20.2. Это вытекает из сл. 19.2 на стр. 259, но без труда проверяется и прямым вычислением.

Упр. 20.3. На каждой пунктирной прямой есть ровна одна точка, составляющая вместе с y_* гармоническую пару к паре точек пересечения прямой с коникой. По предл. 18.1 на стр. 238 эта точка лежит на поляре точки y_*, т. е. высекается из пунктирной прямой прямою $(f_1 f_2)$.

Упр. 20.4. Все четыре фокуса совпадают с центром, а все четыре директрисы — с бесконечно удалённой прямой.

Упр. 20.8. Поляра любой точки $w \in \ell_\infty$ проходит через полюс y_* прямой ℓ_∞, т. е. параллельна оси параболы. Эта поляра пересекает любую прямую $\ell \ni w$ по такой точке u, что сопряжённые относительно P точки u, w гармоничны точкам пересечения $\ell \cap P$, т. е. u является серединой хорды $\ell \cap P$.

Упр. 20.9. Прямая $(f\iota_+)$, где $f = (1 : t : 0) = z_* + tx_* \in (z_* x_*)$, касается параболы если и только если матрица Грама векторов f, ι_+

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2at & ia \\ ia & -1 \end{pmatrix}$$

вырождена, откуда $t = a/2$. Полярное преобразование переводит вектор $f = (1 : a/2 : 0)$ в прямую, однородное уравнение которой имеет коэффициенты

$$(1 : a/2 : 0) \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (a^2/2 : a : 0) = (a/2 : 1 : 0)\,.$$