§15. Кососимметричные билинейные и грассмановы квадратичные формы

15.1. Симплектические пространства. Согласно сл. 13.2 из теоремы Дарбу[1], каждое векторное пространство с невырожденной кососимметричной формой изометрически изоморфно координатному пространству $\Bbbk^{2n}$, на котором форма имеет в стандартном базисе матрицу Грама

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} ,$$

как в прим. 13.3 на стр. 174. Мы будем называть такие пространства *симплектическими* и обозначать Ω_{2n} по аналогии с гиперболическими пространствами H_{2n}.

Упражнение 15.1. Убедитесь, что прямая ортогональная сумма $\Omega_{2m} \dotplus \Omega_{2k}$ изометрически изоморфна $\Omega_{2(m+k)}$.

Прямым аналогом предл. 14.1 на стр. 182 является следующий факт.

Предложение 15.1

Каждое изотропное подпространство U невырожденной кососимметричной формы ω на пространстве V содержится в некотором симплектическом подпространстве $W \subset V$ размерности $\dim W = 2\dim U$, и любой базис в U дополняется[2] до симплектического базиса в W.

Доказательство. Выберем в U базис $u_1, \dots, u_m$, дополним его до базиса в V и рассмотрим двойственный к нему относительно ω базис. Первые m векторов $u_1^\vee, \dots, u_m^\vee$ этого двойственного базиса удовлетворяют равенствам

$$\omega\left(u_i, u_j^\vee\right) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j\,, \end{cases} \tag{15-1}$$

которые не нарушаются при добавлении к любому из векторов $u_j^\vee$ любой линейной комбинации векторов u_i. Заменяя каждый вектор $u_j^\vee$ вектором

$$w_j = u_j^\vee - \sum_{\nu<j} \omega\left(u_j^\vee, u_\nu^\vee\right) \cdot u_\nu\,, \tag{15-2}$$

получаем набор векторов $w_1, \dots, w_m$, также удовлетворяющий равенствам (15-1), но порождающий изотропное подпространство, поскольку для всех $i < j$

$$\omega(w_i, w_j) = \omega(u_i^\vee, u_j^\vee) - \omega(u_j^\vee, u_i^\vee) \cdot \omega(u_i^\vee, u_i) = 0\,.$$

Таким образом, векторы u_i и w_j с $1 \leqslant i, j \leqslant m$ составляют симплектический базис в своей линейной оболочке, которую мы и возьмём в качестве W. □

Определение 15.1 (лагранжевы подпространства)

Изотропные подпространства максимальной возможной размерности n в симплектическом пространстве Ω_{2n} называются *лагранжевыми подпространствами*.

[1] См. теор. 13.3 на стр. 181.

[2] Многими способами.

Следствие 15.1
Каждое изотропное подпространство $U \subset \Omega_{2n}$ содержится в некотором лагранжевом подпространстве $L \subset \Omega_{2n}$.

Доказательство. Пусть $\dim U = k$. Тогда U содержится в некотором симплектическом подпространстве $\Omega_{2k} \subset \Omega_{2n}$. Поскольку ограничение симплектической формы ω с Ω_{2n} на Ω_{2k} невырождено, $\Omega_{2n} = \Omega_{2k} \oplus \Omega_{2k}^{\perp}$ и ограничение формы ω на $\Omega_{2k}^{\perp}$ тоже невырождено, т. е. ортогонал $\Omega_{2k}^{\perp}$ изометрически изоморфен симплектическому подпространству $\Omega_{2(n-k)}$, которое в свою очередь является прямой суммой двух $2(n-k)$-мерных изотропных подпространств. Прямая сумма любого из них с подпространством U является лагранжевым подпространством, содержащим U. □

Теорема 15.1
Для каждого лагранжева подпространства $L \subset V$ найдётся такое лагранжево подпространство $L' \subset V$, что $V = L \oplus L'$. При этом каждый базис $\boldsymbol{e}$ подпространства L однозначно достраивается некоторым базисом $\boldsymbol{e}'$ подпространства L' до симплектического базиса пространства V. При фиксированном L' все дополнительные к L лагранжевы подпространства L'' биективно соответствуют линейным операторам $f : L' \to L$, удовлетворяющим равенству[1]

$$\omega(u_1, fu_2) = -\omega(fu_1, u_2) \text{ для всех } u_1, u_2 \in L' .$$

Доказательство. Согласно предл. 15.1 базис $\boldsymbol{e}$ подпространства L достраивается до симплектического базиса в некотором содержащем L симплектическом подпространстве $W \subset V$ размерности $\dim W = 2\dim L = \dim V$. Поэтому $W = V$ и в качестве L' можно взять линейную оболочку последних $n = \dim L$ векторов получающегося таким образом симплектического базиса в V. Индуцированное правой корреляцией $\omega^{\wedge} : V \to V^*$ отображение

$$\omega_L^{\wedge} : L' \to L^* ,\ v \mapsto \omega(\,*\,, v)|_L , \tag{15-3}$$

переводящее вектор $v \in L'$ в линейную форму $u \mapsto \omega(u, v)$ на подпространстве $L \subset V$, является изоморфизмом векторных пространств, поскольку переводит любой базис $\boldsymbol{e}'$ подпространства L', дополняющий базис $\boldsymbol{e}$ в L до симплектического базиса в V, в двойственный к $\boldsymbol{e}$ базис $\boldsymbol{e}^*$ пространства L^*.

Упражнение 15.2. Убедитесь в этом.

Таким образом, базис $\boldsymbol{e}'$ в L' однозначно восстанавливается по $\boldsymbol{e}$ как прообраз двойственного к $\boldsymbol{e}$ базиса в L^* при независящем от выбора базиса изоморфизме (15-3).

Далее, каждое дополнительное к L подпространство $L'' \subset V = L' \oplus L$ биективно проектируется на L' вдоль L, ибо ядро такой проекции равно $L'' \cap L$. Поэтому для любого вектора $u \in L'$ существует единственный такой вектор $f(u) \in L$, что $u + f(u) \in L''$. Правило $u \mapsto f(u)$ задаёт линейное отображение $f : L' \to L$, графиком которого является подпространство $L'' \subset L' \oplus L$. Таким образом, мы получаем биекцию между линейными отображениями $f : L' \to L$ и подпространствами $L'' \subset L' \oplus L = V$, которые изоморфно проектируются на L' вдоль L. При этом изотропность такого подпространства $L'' \subset V$ равносильна антисамосопряжённости задаваемого им оператора $f : L' \to L$, графиком которого является L'', так как

$$\omega\left(u_1 + f(u_1), u_2 + f(u_2)\right) = \omega\left(u_1, f(u_2)\right) + \omega\left(f(u_1), u_2\right)$$

в силу изотропности подпространств $L' \ni u_1, u_2$ и $L \ni f(u_1), f(u_2)$. □

[1] Такие операторы называются *антисамосопряжёнными* относительно формы ω.

15.2. Грассмановы квадратичные формы. Покажем, что каждый ненулевой однородный грассманов многочлен[1] второй степени $\omega \in \Lambda^2 V$ на конечномерном пространстве V над любым полем $\Bbbk$ в подходящем базисе $\boldsymbol{e}$ пространства V может быть записан в *нормальном виде Дарбу*

$$e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \ldots + e_{2r-1} \wedge e_{2r}\,. \tag{15-4}$$

Для этого рассмотрим произвольный базис $\boldsymbol{u}$ и перенумеруем его векторы так, чтобы

$$\omega = u_1 \wedge (\alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n) + u_2 \wedge (\beta_3 u_3 + \ldots + \beta_n u_n) + (\text{члены без } u_1 \text{ и } u_2)\,,$$

где коэффициент $\alpha_2 \neq 0$ и вектор $v_2 \overset{\text{def}}{=} \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n \neq 0$. Перейдём к новому базису $\boldsymbol{v}$ из векторов $v_i = u_i$ при $i \neq 2$ и вектора v_2.

Упражнение 15.3. Убедитесь, что это действительно базис.

Подставляя в предыдущую формулу $u_2 = \left(v_2 - \alpha_3 v_3 - \ldots - \alpha_n v_n\right)/\alpha_2$, получаем

$$\begin{aligned} \omega = v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge (\gamma_3 v_3 + \ldots + \gamma_n v_n) + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2) = \\ = (v_1 - \gamma_3 v_3 - \ldots - \gamma_n v_n) \wedge v_2 + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2) \end{aligned}$$

для некоторых $\gamma_3, \ldots, \gamma_n \in \Bbbk$. Переходя к базису $\boldsymbol{w}$ из векторов $w_1 = v_1 - \gamma_3 v_3 - \ldots - \gamma_n v_n$ и $w_i = v_i$ при $i \neq 1$, получаем $\omega = w_1 \wedge w_2 + (\text{члены без } w_1 \text{ и } w_2)$, после чего процесс может быть продолжен по индукции.

Следствие 15.2

Над полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ однородный грассманов многочлен $\omega \in \Lambda^2 V$ тогда и только тогда разложим в произведение $u \wedge w$ двух векторов $u, w \in V$, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

Доказательство. Если $\omega = u \wedge w$, то $\omega \wedge \omega = u \wedge w \wedge u \wedge w = 0$. Чтобы получить обратное, выберем в V базис $\boldsymbol{e}$, в котором $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \cdots$. Если в этой сумме есть хотя бы два слагаемых, то базисный моном $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ войдёт в $\omega \wedge \omega$ с ненулевым коэффициентом 2, а значит, $\omega \wedge \omega \neq 0$. Таким образом, равенство $\omega \wedge \omega = 0$ влечёт равенство $\omega = e_1 \wedge e_2$. □

15.2.1. Поляризация грассмановой квадратичной формы. Напомню[2], что с каждым базисом $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ пространства V связан базис в $\Lambda^2 V$, состоящий из $n(n-1)/2$ грассмановых мономов $e_{ij} = e_i \wedge e_j$ с $i < j$, и каждый однородный грассманов многочлен второй степени $\omega \in \Lambda^2 V$ однозначно представляется в виде

$$\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij}\, e_{ij}\,, \quad \text{где} \quad \omega_{ij} \in \Bbbk\,, \tag{15-5}$$

и суммирование происходит по всем $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Если $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$, то подобно тому, как это делалось для коммутативных квадратичных форм[3], каждое слагаемое в (15-5) можно переписать в виде $\omega_{ij} e_{ij} = \omega'_{ij} e_i \wedge e_j + \omega'_{ji} e_j \wedge e_i$, где $\omega'_{ij} = -\omega'_{ji} = \omega_{ij}/2$. Составленная из чисел ω'_{ij} кососимметричная квадратная матрица $\Omega_{\boldsymbol{e}} = (\omega'_{ij}) \in \operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$ называется *матрицей Грама*

[1] См. n° 8.5 на стр. 111.
[2] См. 8-15 на стр. 111.
[3] Ср. с n° 14.3 на стр. 186.

грассмановой квадратичной формы ω в базисе $\boldsymbol{e}$. В терминах матрицы Грама форма ω записывается в виде

$$\omega = \sum_{i,j=1}^{n} \omega'_{ij} e_i \wedge e_j = \left(\boldsymbol{e}\, \Omega_{\boldsymbol{e}}\right) \wedge \boldsymbol{e}^t\,, \tag{15-6}$$

где в отличие от (15-5) суммирование происходит по всем n^2 парам индексов i, j, а обозначение $A \wedge B$ для матриц A, B, элементами которых являются векторы, предписывает перемножить эти матрицы по обычному правилу, используя в качестве произведения матричных элементов грассманово произведение соответствующих векторов, т. е. в (i,j)-й позиции матрицы $A \wedge B$ стоит вектор $a_{i1} \wedge b_{1j} + a_{i2} \wedge b_{2j} + \dots + a_{in} \wedge b_{nj}$.

При выборе в V другого базиса $\boldsymbol{f}$, через который базис $\boldsymbol{e}$ выражается по формуле $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{f}\, C_{\boldsymbol{fe}}$, матрица Грамма $\Omega_{\boldsymbol{f}}$ грассмановой квадратичной формы ω в базисе $\boldsymbol{f}$ будет связана с матрицей Грама $\Omega_{\boldsymbol{e}}$ соотношением

$$\Omega_{\boldsymbol{e}} = C_{\boldsymbol{fe}} \Omega_{\boldsymbol{e}} C_{\boldsymbol{fe}}^t \tag{15-7}$$

поскольку $\omega = \left(\boldsymbol{e}\, \Omega_{\boldsymbol{e}}\right) \wedge \boldsymbol{e}^t = \left(\boldsymbol{f}\, C_{\boldsymbol{fe}} \Omega_{\boldsymbol{e}}\right) \wedge \left(C_{\boldsymbol{fe}}^t \boldsymbol{f}^t\right) = \left(\boldsymbol{f}\, C_{\boldsymbol{fe}} \Omega_{\boldsymbol{e}} C_{\boldsymbol{fe}}^t\right) \wedge \boldsymbol{f}^t$.

Пример 15.1 (нормальная форма Дарбу)
Если $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$, то существование базиса $\boldsymbol{e}$, в котором заданная грассманова квадратичная форма $\omega \in \Lambda^2 V$ имеет вид (15-4), вытекает из теоремы о приведении кососимметричной билинейной формы к нормальному виду Дарбу[1]. Действительно, доказывая эту теорему, мы установили, что для любой кососимметричной матрицы Ω существует такая обратимая матрица C, что все ненулевые элементы матрицы $C\Omega C^t$ сосредоточены в расположенных на главной диагонали 2×2-блоках вида $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Поэтому грассманова квадратичная форма, имеющая матрицу Грама Ω в некотором базисе $\boldsymbol{f}$, запишется в базисе $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}\, C$ как $\omega = 2g_1 \wedge g_2 + 2g_3 \wedge g_4 + \dots$ Искомый базис $\boldsymbol{e}$ получается из $\boldsymbol{g}$ удвоением векторов с нечётными номерами: $e_{2i+1} = 2g_{2i+1}$, $e_{2i} = g_{2i}$.

15.3. Пфаффиан. Рассмотрим кососимметричную матрицу $A = (a_{ij})$ размера $(2n)\times(2n)$. Будем считать её элементы a_{ij} с $i < j$ независимыми коммутирующими переменными и обозначим через $\mathbb{Z}[a_{ij}]$ кольцо многочленов с целыми коэффициентами от этих $2n^2 - n$ переменных. Мы собираемся показать, что существует единственный такой многочлен $\operatorname{Pf}(A) \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$, что

$$\operatorname{Pf}^2(A) = \det(A) \quad \text{и} \quad \operatorname{Pf}(J') = 1\,,$$

где J' — блочно диагональная матрица из n идущих по главной диагонали 2×2-блоков

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

как в теор. 13.3 на стр. 181. Многочлен $\operatorname{Pf}(A)$ называется *пфаффианом* кососимметричной матрицы A и явно выражается через матричные элементы по формуле

$$\operatorname{Pf}(A) = \sum_{\substack{\{i_1,j_1\}\sqcup\dots\sqcup\{i_n,j_n\}= \\ =\{1,2,\dots,2n\}}} \operatorname{sgn}\left(i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_n, j_n\right) \cdot a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}\,, \tag{15-8}$$

[1] См. теор. 13.3 на стр. 181.

где суммирование происходит по всем разбиениям множества $\{1, \dots, 2n\}$ в объединение n неупорядоченных непересекающихся двухэлементных множеств $\{i_\nu, j_\nu\}$, порядок внутри которых тоже не существен, а sgn означает знак указанной в его аргументе перестановки из симметрической группы S_{2n}.

Упражнение 15.4. Убедитесь, что этот знак не меняется при перестановках пар друг с другом, а вся правая часть (15-8) не меняется при перестановке элементов внутри любой из пар.

Например,

$$\det\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}^2\,, \quad \det\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2\,.$$

Чтобы извлечь квадратный корень из $\det A$, интерпретируем A как матрицу Грама невырожденной кососимметричной формы в стандартном базисе координатного векторного пространства K^{2n} над полем $K = \mathbb{Q}(a_{ij})$ рациональных функций от переменных a_{ij} с коэффициентами в поле $\mathbb{Q}$. По теореме Дарбу[1] в K^{2n} есть базис, в котором эта форма имеет матрицу Грама J'. Поэтому $A = CJ'C^t$ для некоторой матрицы $C \in \mathrm{GL}_{2n}(K)$. Так как $\det J' = 1$, определитель $\det(A) = \det^2(C)$.

Покажем, что $\det C$ является многочленом с целыми коэффициентами и вычисляется по формуле (15-8). Для этого рассмотрим ещё одну кососимметричную матрицу $B = \big(b_{ij}\big)$, наддиагональные элементы b_{ij} которой также будем считать независимыми переменными, и образуем грассманову квадратичную форму

$$\beta_B(\xi) \overset{\text{def}}{=} (\xi B) \wedge \xi^t = \sum_{ij} b_{ij}\xi_i \wedge \xi_j$$

от $2n$ переменных $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{2n})$ с коэффициентами в кольце $\mathbb{Z}[b_{ij}]$. Поскольку чётные мономы $\xi_i \wedge \xi_j$ лежат в центре грассмановой алгебры, n-тая грассманова степень

$$\begin{aligned} \beta_B(\xi)^{\wedge n} &= \beta_B(\xi) \wedge \dots \wedge \beta_B(\xi) = \Big(\sum_{i_1 j_1} b_{i_1 j_1}\xi_{i_1} \wedge \xi_{j_1}\Big) \wedge \dots \wedge \Big(\sum_{i_n j_n} b_{i_n j_n}\xi_{i_n} \wedge \xi_{j_n}\Big) = \\ &= 2^n n! \sum_{\substack{\{i_1,j_1\}\sqcup\dots\sqcup\{i_n,j_n\}= \\ =\{1,2,\dots,2n\}}} \mathrm{sgn}\big(i_1, j_1, \dots, i_n, j_n\big) b_{i_1 j_1} \dots\, b_{i_n j_n} \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_{2n} = \\ &= 2^n n!\,\mathrm{Pf}(B)\,\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_{2n}\,, \end{aligned} \tag{15-9}$$

где в суммирование предпоследней строке происходит, как и в формуле (15-8), по всем разбиениям множества $\{1, \dots, 2n\}$ в объединение n неупорядоченных непересекающихся двухэлементных множеств $\{i_\nu, j_\nu\}$, порядок внутри которых не существен, и $\mathrm{Pf}(B) \in \mathbb{Z}[b_{ij}]$ означает тот же самый многочлен, что и в формуле (15-8). Заменим в (15-9) грассмановы переменные ξ на новые грассмановы переменные η по формуле $\xi = \eta\, C$, где $C \in \mathrm{GL}_{2n}(K)$. В правой части (15-9) получим $2^n n!\,\mathrm{Pf}(B)\,\det C\,\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_{2n}$. Квадратичная форма $\beta_B(\xi)$ в самой левой части (15-9) превратится в $\beta_B(\xi) = (\xi\, B) \wedge \xi^t = (\eta\, CB) \wedge (\eta\, C)^t = (\eta\, CBC^t) \wedge \eta^t = \beta_{CBC^t}(\eta)$, а её n-тая грассманова степень — в $\beta_{CBC^t}(\eta)^{\wedge n} = 2^n n!\;\mathrm{Pf}(CBC^t)\,\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_{2n}$. Таким образом, для любой матрицы

[1] См. теор. 13.3 на стр. 181.

$C \in \mathrm{GL}_{2n}(K)$ в кольце многочленов $K[b_{ij}]$ от переменных b_{ij} с коэффициентами в поле K выполняется равенство

$$\mathrm{Pf}(CBC^t) = \mathrm{Pf}(B)\,\det C\,. \tag{15-10}$$

Полагая в этом равенстве $B = J'$ и беря в качестве C такую матрицу, что $CJ'C^t = A$, получаем в поле $K = \mathbb{Q}(a_{ij})$ равенство $\mathrm{Pf}(A) = \det C$.

Упражнение 15.5. Убедитесь, что $\mathrm{Pf}(J') = 1$.

Это доказывает существование пфаффиана и формулу (15-8). Единственность пфаффиана вытекает из того, что многочлен $x^2 - \det A = \big(x - \mathrm{Pf}(A)\big)\big(x + \mathrm{Pf}(A)\big) \in \mathbb{Z}[a_{ij}][x]$ имеет в целостном кольце $\mathbb{Z}[a_{ij}]$ ровно два корня $x = \pm\,\mathrm{Pf}(A)$, и требование $\mathrm{Pf}(J') = 1$ однозначно фиксирует нужный знак.

15.4. Симплектическая группа. Изометрии $f : \Omega_{2n} \xrightarrow{\sim} \Omega_{2n}$ называются *симплектическими преобразованиями* и образуют группу $\mathrm{Sp}(\Omega_{2n})$, называемую *симплектической группой* пространства Ω_{2n}. Сопоставление оператору его матрицы в симплектическом базисе изоморфно отображает группу $\mathrm{Sp}(\Omega_{2n})$ на *группу симплектических матриц*

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk) \overset{\text{def}}{=} \{F \in \mathrm{Mat}_{2n}(\Bbbk) \mid F^t J F = J\}\,, \quad \text{где} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 15.6. Убедитесь, что $J^2 = -E$ и $\det J = 1$.

Если записать симплектическую матрицу F в блочном виде

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A, B, C, D \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)\,,$$

то условие $F^t J F = J$ примет вид

$$\begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

и будет равносильно выполнению соотношений $C^tA = A^tC$, $D^tB = B^tD$, $E + C^tB = A^tD$.

Упражнение 15.7. Убедитесь в этом.

Из этих соотношений вытекает, что полная линейная группа $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ гомоморфно вкладывается в симплектическую группу $\mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk)$ по правилу

$$G \mapsto \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G^{t\,-1} \end{pmatrix}. \tag{15-11}$$

На бескоординатном языке вложение (15-11) описывается в духе теор. 15.1 на стр. 197. Разложим симплектическое пространство в прямую сумму $\Omega_{2n} = L \oplus L'$ лагранжевых подпространств L, L'. В доказательстве теор. 15.1 мы видели, что сопоставление вектору $w \in L'$ линейного функционала $\omega_L^{\wedge}(w) : L \to \Bbbk$, $u \mapsto \omega(u, w)$, устанавливает изоморфизм пространства L' с двойственным к L пространством L^*. Прямая сумма этого изоморфизма с тождественным изоморфизмом $\mathrm{Id}_L : L \xrightarrow{\sim} L$ даёт изоморфизм $\Omega_{2n} = L \oplus L' \xrightarrow{\sim} L \oplus L^*$, который переводит симплектическую форму ω на Ω_{2n} в невырожденную кососимметричную форму ω_L на $L \oplus L^*$, действующую на векторы (u, ξ) и (w, η) из $L \oplus L^*$ по правилу

$$\omega_L\big((u, \xi), (w, \eta)\big) = \eta(u) - \xi(w)\,. \tag{15-12}$$

Упражнение 15.8. Убедитесь в этом.

Вложение $\mathrm{GL}(L) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(\omega_L)$ переводит обратимый оператор $g : L \xrightarrow{\sim} L$ в оператор

$$g \oplus (g^{-1})^* : L \oplus L^* \xrightarrow{\sim} L \oplus L^* , \quad (v, \xi) \mapsto (gv, (g^{-1})^* \xi) , \tag{15-13}$$

где $(g^{-1})^* : L^* \to L^*$ — оператор, двойственный к обратному к g оператору $g^{-1} : L \to L$. Так как оператор (15-13) сохраняет симплектическую форму (15-12):

$$\omega_L\big((gu, (g^{-1})^*\xi), (gw, (g^{-1})^*\eta)\big) = (g^{-1})^*\eta(gu) - (g^{-1})^*\xi(gw) =$$
$$= \eta(g^{-1}gu) - \xi(g^{-1}gw) = \eta(u) - \xi(w) = \omega_L\big((u, \xi), (w, \eta)\big) ,$$

он действительно задаёт инъективный гомоморфизм групп $\mathrm{GL}(L) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(L \oplus L^*)$. Матричная формула (15-11) получается если записать операторы g и $(g^{-1})^*$ в двойственных базисах $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}^*$ пространств L и L^*.

Упражнение 15.9. Убедитесь что базис $(e_1, 0), \dots (e_n, 0), (0, e_1^*), \dots , (0, e_n^*)$, где e_i и e_i^* пробегают двойственные друг другу базисы в L и L^*, является симплектическим для формы (15-12) на $L \oplus L^*$.

Предложение 15.2

Каждая симплектическая матрица $F \in \mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk)$ имеет единичный определитель $\det F = 1$ и возвратный[1] характеристический многочлен: $\chi_F(t) = t^{2n}\chi_F(t^{-1})$.

Доказательство. Из равенства $F^t J F = J$ и форм. (15-10) на стр. 201 вытекает, что

$$\mathrm{Pf}(J) = \mathrm{Pf}(F^t J F) = \det(F)\,\mathrm{Pf}(J) ,$$

откуда $\det F = 1$, так как $\mathrm{Pf}(J) \neq 0$. Кроме того, из равенства $F^t J F = J$ вытекает, что обратная к F матрица $F^{-1} = J^{-1}F^tJ = -JF^tJ$, откуда характеристический многочлен

$$\chi_F(t) = \det(tE - F) = t^{2n}\det(F)\det(F^{-1} - t^{-1}E) = t^{2n}\det(t^{-1}J^2 - JF^tJ) =$$
$$= t^{2n}\det{}^2(J)\det(t^{-1}E - F^t) = t^{2n}\det(t^{-1}E - F) = t^{2n}\chi_F(t^{-1}) ,$$

что и требовалось. □

Предложение 15.3

Симплектическая группа $\mathrm{Sp}(\Omega_{2n})$ транзитивно действует на изотропных и на симплектических подпространствах любой фиксированной размерности.

Доказательство. Если подпространства $W_1, W_2 \subset \Omega_{2n}$ оба изометрически изоморфны Ω_{2k}, то их ортогоналы $W_1^\perp, W_2^\perp \subset \Omega_{2n}$ оба изометрически изоморфны $\Omega_{2(n-k)}$. Прямая сумма любых двух изометрических изоморфизмов $W_1 \xrightarrow{\sim} W_2$ и $W_1^\perp \xrightarrow{\sim} W_2^\perp$ даёт изометрический изоморфизм $\Omega_{2n} = W_1 \oplus W_1^\perp \xrightarrow{\sim} W_2 \oplus W_2^\perp = \Omega_{2n}$, переводящий W_1 в W_2. Если k-мерные подпространства $U_1, U_2 \subset \Omega_{2n}$ изотропны, то любой базис $\boldsymbol{u_1}$ в U_1 и любой базис $\boldsymbol{u_2}$ в U_2 дополняются по предл. 15.1 на стр. 196 до состоящих из $2k$ векторов наборов $\boldsymbol{w_1}$ и $\boldsymbol{w_2}$, являющихся симплектическими базисами в своих линейных оболочках W_1 и W_2. Отображая первый набор во второй, мы получаем изометрический изоморфизм $W_1 \xrightarrow{\sim} W_2$, переводящий U_1 в U_2. Беря, как и выше, прямую сумму этого автоморфизма с любым изометрическим изоморфизмом $W_1^\perp \xrightarrow{\sim} W_2^\perp$, получаем изометрический автоморфизм пространства Ω_{2n}, переводящий U_1 в U_2. □

[1]Напомню, что многочлен $a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m$ называется *возвратным*, если последовательность его коэффициентов симметрична относительно своей середины: $a_k = a_{m-k}$ при всех $k = 0, 1, \dots , m$.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 15.4. Перестановка одной пары с другой как единого целого чётная (это пара транспозиций). Перестановка между собою элементов из ν-й пары меняет $\mathrm{sgn}(i_1, j_1, \dots, i_n, j_n)$, но одновременно заменяет матричный элемент $a_{i_\nu j_\nu}$ элементом $a_{j_\nu i_\nu} = -a_{i_\nu j_\nu}$.

Упр. 15.8. Пусть $\xi = \omega^\wedge(u')|_L$ и $\eta = \omega^\wedge(w')|_L$ для некоторых $u', w' \in L'$. Тогда $\omega(u + u', w + w') = = \omega(u, w') - \omega(w, u') = \eta(u) - \xi(w)$, что и утверждается.