§8. Определители

8.1. Объём, полилинейные косые формы и определитель. Ненулевая функция от n аргументов $\omega : V \times \cdots \times V \to \Bbbk$ на n-мерном векторном пространстве V называется *объёмом ориентированного n-мерного параллелепипеда* или *формой n-мерного объёма*, если она обладает теми же двумя свойствами, что и форма площади из n° 1.3 на стр. 11, а именно[1]:

1) объём не меняется при добавлений к любому из аргументов произвольной кратности любого другого аргумента: $\omega(\dots, u + \lambda w, \dots, w, \dots) = \omega(\dots, u, \dots, w, \dots)$

2) при умножении любого из аргументов на число объём умножается на это число:

$$\omega(\dots, \lambda v, \dots) = \lambda\, \omega(\dots, v, \dots)\,.$$

На геометрическом языке эти свойства, как и раньше, означают, что объём параллелепипеда, натянутого на векторы $v_1, \dots, v_n$, как на рис. 8◇1, умножается на λ при умножении любого ребра на λ, и не меняется при сдвиге двух противоположных $(n-1)$-мерных граней друг относительно друга в направлении какого-нибудь параллельного этим граням ребра (параллельная проекция происходящего на двумерную плоскость, порождённую ребром, вдоль которого делается сдвиг, и ребром, соединяющим сдвигаемые грани, изображена на рис. 8◇2).

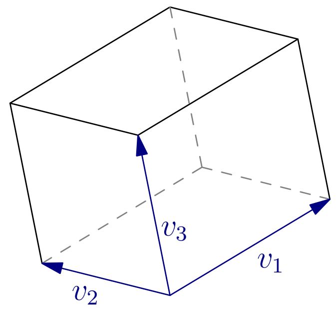


Рис. 8◇1. Параллелепипед.

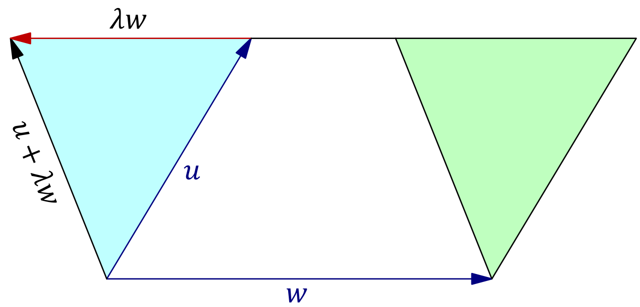


Рис. 8◇2. Параллельный перекос.

Дословно так же, как лем. 1.3 на стр. 12, доказывается

Лемма 8.1
Каждая форма n-мерного объёма ω автоматически обладает следующими свойствами:

1) если векторы $v_1, \dots, v_n$ линейно зависимы, то $\omega(v_1, \dots, v_n) = 0$, в частности, ω *кососимметрична*[2], т. е. $\omega(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0$

2) форма ω линейна по каждому из своих аргументов при фиксированных остальных, т. е.

$$\omega(\dots, \lambda u + \mu w, \dots) = \lambda\, \omega(\dots, u, \dots) + \mu\, \omega(\dots, w, \dots) \tag{8-1}$$

[1]Здесь и далее мы обозначаем многоточиями аргументы, остающиеся неизменными в левой и правой части равенства.

[2]Функция от нескольких аргументов называется *кососимметричной*, если она обращается в нуль, когда какие-нибудь два аргумента совпадают.

3) форма ω *знакопеременна*[1], т. е. $\omega(\dots, u, \dots, w, \dots) = -\omega(\dots, w, \dots, u, \dots)$.

Доказательство. Если один из векторов линейно выражается через остальные, к примеру, $v_1 = \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$, то $\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(\lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n, v_2, \dots, v_n) = \omega(0, v_2, \dots, v_n) = \omega(0 \cdot 0, v_2, \dots, v_n) = 0 \cdot \omega(0, v_2, \dots, v_n) = 0$. Это доказывает свойство (1). Свойство (2) очевидно, когда оба набора аргументов в правой части равенства (8-1) линейно зависимы: в этом случае набор аргументов в левой части тоже линейно зависим, и обе части (8-1) нулевые по уже доказанному свойству (1). Поэтому без ограничения общности можно считать, что аргументы первого слагаемого в правой части (8-1) образуют базис пространства V. Тогда $w = \varrho u + v$, где v является линейной комбинацией остальных $n-1$ аргументов, и левая часть (8-1) равна

$$\omega(\dots, \lambda u + \mu\varrho u + \mu v, \dots) = \omega(\dots, (\lambda + \mu\varrho)u, \dots) = (\lambda + \mu\varrho)\omega(\dots, u, \dots),$$

а второе слагаемое правой части переписывается как $\mu\omega(\dots, \varrho u + v, \dots) = \mu\varrho \cdot \omega(\dots, u, \dots)$, что доказывает свойство (2). Знакопеременность следует из линейности и кососимметричности:

$$\begin{aligned}\omega(\dots, u, \dots, w, \dots) + \omega(\dots, w, \dots, u, \dots) = \\ = \omega(\dots, u, \dots, u, \dots) + \omega(\dots, u, \dots, w, \dots) + \omega(\dots, w, \dots, u, \dots) + \omega(\dots, w, \dots, w, \dots) = \\ = \omega(\dots, u + w, \dots, u + w, \dots) = 0.\end{aligned}$$

□

8.1.1. Кососимметричные *n*-линейные формы. Линейная по каждому своему аргументу функция $V \times \dots \times V \to \Bbbk$ от k векторов пространства V называется *k-линейной формой* на V.

Упражнение 8.1. Убедитесь, что k-линейные формы образуют векторное пространство относительно обычных операций сложения функций и умножения функций на константы, а кососимметричные формы составляют в нём векторное подпространство.

Лемма 8.2

Любые две n-линейные кососимметричные формы на n-мерном векторном пространстве V пропорциональны.

Доказательство. Рассмотрим n-линейную кососимметричную форму $\omega : V \times \dots \times V \to \Bbbk$, зафиксируем в пространстве V какой-нибудь базис $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и выразим через $\omega(e_1, \dots, e_n)$ значение формы ω на произвольных векторах $(v_1, \dots, v_n) = (e_1, \dots, e_n)\, C$, где в j-том столбце матрицы C стоят координаты вектора v_j в базисе $\boldsymbol{e}$. Так как ω полилинейна по каждому аргументу, $\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega\big(\sum_{i_1} e_{i_1} c_{i_1 1}, \dots, \sum_{i_n} e_{i_n} c_{i_n n}\big) = \sum_{i_1, \dots, i_n} c_{i_1 1} \cdots c_{i_n n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$. Так как при совпадении каких-либо двух аргументов форма ω зануляется, в последней сумме отличны от нуля только слагаемые с попарно разными индексами $i_1, \dots, i_n$. Каждый такой набор индексов имеет вид $g(1), \dots, g(n)$, где $g : \{1, \dots, n\} ⥲ \{1, \dots, n\}$ — некоторая биекция. Все такие биекции образуют группу *группу перестановок*[2] S_n. В силу знакопеременности формы ω для каждой перестановки $g \in S_n$ выполняется равенство $\omega(e_{g(1)}, \dots, e_{g(n)}) = \operatorname{sgn}(g)\omega(e_1, \dots, e_n)$,

[1] Функция от нескольких аргументов называется *знакопеременной*, если при перестановке любых двух аргументов она умножается на -1.

[2] Также называемую *симметрической группой*. Я надеюсь, что читатель наслышан про группу S_n, чётность перестановок и мультипликативный гомоморфизм $\operatorname{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$ из курса алгебры. Если это не так, то все необходимые сведения можно почерпнуть из добавления в n° 8.4 ниже.

где $\operatorname{sgn}(g) = \pm 1$ означает *знак* перестановки g, равный $+1$ для чётных перестановок, и -1 для нечётных. Таким образом, $\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(e_1, \dots, e_n) \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) c_{g(1)1} c_{g(2)2} \cdots c_{g(n)n}$. Последняя сумма называется *определителем* $n \times n$ матрицы $C = (c_{ij})$ и обозначается

$$\det C \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) c_{g(1)1} c_{g(2)2} \cdots c_{g(n)n} \tag{8-2}$$

Поскольку $\det C$ зависит только от матрицы C, но не от формы ω, для любых двух n-линейных кососимметричных форм ω_1, ω_2 и векторов $v_1, \dots, v_n \in V$ имеется равенство

$$\frac{\omega_1(v_1, \dots, v_n)}{\omega_2(v_1, \dots, v_n)} = \frac{\omega_1(e_1, \dots, e_n)}{\omega_2(e_1, \dots, e_n)}\,.$$

Мы заключаем, что его левая часть не зависит от выбора векторов v_i, т. е. функции ω_1 и ω_2 пропорциональны. $\square$

8.1.2. Определитель матрицы. Равенство (8-2) предписывает всеми возможными способами выбирать n элементов матрицы C так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось выбрано ровно по одному элементу. Клетки, где находятся выбранные элементы, задают биекцию $g : j \mapsto g(j)$ из множества столбцов в множество строк матрицы C. Каждую выбранную n-ку элементов следует перемножить и умножить на знак перестановки g, которую она задаёт. Полученные таким образом $n!$ произведений складываются.

Пример 8.1

Определители матриц размера 2×2 и 3×3 имеют вид

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \tag{8-3}$$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = c_{11}c_{22}c_{33} + c_{13}c_{21}c_{32} + c_{12}c_{23}c_{31} - \\ - c_{11}c_{23}c_{32} - c_{13}c_{22}c_{31} - c_{12}c_{21}c_{33}\,. \end{aligned} \tag{8-4}$$

Во втором равенстве сначала выписаны тождественная и две циклических перестановки, потом — три транспозиции.

Пример 8.2 (определитель треугольной матрицы)

Если матрица C верхнетреугольная[1], т. е. $c_{ij} = 0$ при $i > j$, то единственным ненулевым слагаемым в сумме (8-2) будет произведение диагональных элементов матрицы C, отвечающее тождественной перестановке $g = \mathrm{Id}$. Таким образом, для верхнетреугольной матрицы C определитель $\det C = \prod_i c_{ii}$. В частности, $\det E = 1$.

Предложение 8.1

Для любой квадратной матрицы C выполняется равенство $\det C = \det C^t$.

[1]См. прим. 5.6 на стр. 69.

Доказательство. Суммы (8-2), вычисляющие $\det C$ и $\det C^t$, состоят из одних и тех же произведений всевозможных n-ок элементов матрицы, устанавливающих биекцию $g : j \mapsto g_j$ между номерами столбцов и номерами строк, только в первой из сумм отвечающее такой биекции произведение берётся со знаком $\mathrm{sgn}(g)$, а во второй — со знаком $\mathrm{sgn}(g^{-1})$. Но обратные друг другу перестановки имеют одинаковую чётность: если $g = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_m$, где все σ_i являются транспозициями, то $g^{-1} = \sigma_m\sigma_{m-1} \cdots \sigma_1$ в силу равенства $\sigma_i\sigma_i = \mathrm{Id}$. □

Предложение 8.2
Определитель линеен по каждому столбцу матрицы C и обращается в нуль, если какие-то два столбца совпадают.

Доказательство. Первое вытекает из формулы (8-2): так как каждое из суммируемых произведений линейно зависит от каждого столбца, вся сумма тоже линейна по каждому столбцу. Если i-й столбец матрицы C совпадает с j-м, то в сумме (8-2) слагаемое, отвечающее перестановке g сократится со слагаемым, отвечающим перестановке $h = g\sigma_{ij}$, где σ_{ij} меняет местами i и j, а все остальные номера оставляет на месте. В самом деле, $\mathrm{sgn}(h) = -\mathrm{sgn}(g)$, а отвечающие h и g произведения матричных элементов совпадают: $\cdots c_{h(i)i} \cdots c_{h(j)j} \cdots = \cdots c_{g(j)i} \cdots c_{g(i)j} \cdots = \cdots c_{g(j)j} \cdots c_{g(i)i} \cdots = \cdots c_{g(i)i} \cdots c_{g(j)j} \cdots$. □

Следствие 8.1
Определитель $n \times n$-матрицы является n-линейной кососимметричной функцией как столбцов, так и строк.

Следствие 8.2
Пространство n-линейных кососимметричных форм на n-мерном векторном пространстве V одномерно.

Доказательство. По лем. 8.2 на стр. 96 все n-линейные кососимметричные формы на V пропорциональны. Поэтому достаточно предъявить хотя бы одну такую форму, не равную тождественно нулю. Зафиксируем в V любой базис $e_1, \dots, e_n$ и для векторов $v_1, \dots, v_n$, которые линейно выражаются через него по формуле $(v_1, \dots, v_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$, положим $\omega(v_1, \dots, v_n) = \det C$. Эта форма полилинейна и кососимметрична по предл. 8.2, а в прим. 8.2 видели, что $\omega_e(e_1, \dots, e_n) = \det E = 1$. □

Следствие 8.3
На каждом n-мерном векторном пространстве V существует единственная с точностью до пропорциональности ненулевая форма n-мерного объёма ω. Если векторы $e_1, \dots, e_n$ образуют базис в V, а векторы $v_1, \dots, v_n$ выражаются через него как $(v_1, \dots, v_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$, то

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(e_1, \dots, e_n) \cdot \det C\,.$$

Доказательство. По лем. 8.1 на стр. 95 каждая форма объёма на V кососимметрична и n-линейна. По предыдущему следствию n-линейные кососимметричные формы на V составляют одномерное векторное пространство. Достаточно убедиться, что любая из них является формой объёма, т. е. удовлетворяет условиям (1) и (2) из n° 8.1 на стр. 95. Но условие (2) является составной частью требования линейности формы по каждому аргументу, и в силу линейности

$$\omega\,(\dots, u + \lambda w, \dots, w, \dots) = \omega\,(\dots, u, \dots, w, \dots) + \lambda\omega\,(\dots, w, \dots, w, \dots)\,.$$

Из-за кососимметричности второе слагаемое зануляется, что и доказывает условие (1). □

8.1.3. Определитель линейного оператора. Зафиксируем на n-мерном векторном пространстве V форму объёма ω. Для любого линейного оператора $F : V \to V$ форма

$$\omega_F(v_1, \dots, v_n) \overset{\text{def}}{=} \omega\left(Fv_1, \dots, Fv_n\right)$$

полилинейна и кососимметрична. Поэтому она пропорциональна форме ω. Коэффициент пропорциональности ω_F / ω равен отношению значений этих форм на элементах произвольного базиса $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ пространства V и не зависит от выбора базиса. Поскольку

$$\left(Fe_1,\, Fe_2, \dots, Fe_n\right) = (e_1, \dots, e_n) \cdot F_{\boldsymbol{e}}\,,$$

где $F_{\boldsymbol{e}}$ — матрица оператора F в базисе $\boldsymbol{e}$, коэффициент пропорциональности

$$\frac{\omega_F}{\omega} = \frac{\omega\left(Fe_1,\, Fe_2, \dots, Fe_n\right)}{\omega(e_1, \dots, e_n)} = \frac{\omega(e_1, \dots, e_n) \cdot \det F_e}{\omega(e_1, \dots, e_n)} = \det F_{\boldsymbol{e}}\,.$$

Мы заключаем, что определитель $\det F_{\boldsymbol{e}}$ матрицы оператора не зависит от выбора базиса $\boldsymbol{e}$, в котором пишется матрица, и при применении оператора F к любому набору векторов объём натянутого на них параллелепипеда умножается на $\det F_{\boldsymbol{e}}$. Определитель $\det F_{\boldsymbol{e}}$ называется *определителем линейного оператора* $F : V \to V$ и обозначается $\det F$.

Поскольку при последовательном выполнении операторов $G : V \to V$ и $F : V \to V$ объёмы параллелепипедов умножатся сначала на $\det(G)$, а потом на $\det(F)$, мы заключаем, что для любых двух линейных операторов $F, G : V \to V$ выполняется равенство

$$\det(FG) = \det(F)\det(G) \tag{8-5}$$

В частности, $\det(FG) = \det(GF)$.

Предложение 8.3
Линейный оператор $F : V \to V$ биективен если и только если $\det F \neq 0$.

Доказательство. Если оператор F биективен, то он обратим. Вычисляя определитель обеих частей в матричном равенстве $FF^{-1} = \mathrm{Id}$, получаем $\det F \det F^{-1} = 1$, откуда $\det F \neq 0$. Если оператор не биективен, то столбцы его матрицы $F_{\boldsymbol{e}}$ линейно зависимы по сл. 5.1 на стр. 65, откуда $\det F = \det F_{\boldsymbol{e}} = 0$. □

Следствие 8.4
Квадратная матрица A обратима если и только если $\det A \neq 0$. □

8.1.4. Специальная линейная группа. Из предыдущего вытекает, что операторы определителя 1 образуют в полной линейной группе $\mathrm{GL}(V)$ подгруппу. Она обозначается $\mathrm{SL}(V)$ и называется *специальной линейной группой* пространства V. Геометрически, специальная линейная группа состоит из всех операторов, сохраняющих ненулевую форму объёма на V, и это свойство не зависит от выбора формы объёма. Специальная линейная группа координатного пространства $\Bbbk^n$ состоит из матриц определителя 1 и обозначается $\mathrm{SL}_n(\Bbbk) \subset \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$.

8.1.5. Мультипликативность определителя. Обозначим через $K = \mathbb{Z}[a_{ij}, b_{ij}]$ кольцо многочленов с целыми коэффициентами от $2n^2$ независимых переменных a_{ij} и b_{ij}, где $1 \leqslant i, j \leqslant n$, и рассмотрим в кольце $\mathrm{Mat}_n(K)$ матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = \left(b_{ij}\right)$, элементами которых являются эти переменные.

Упражнение 8.2. Покажите, что многочлен $f(x_1, \dots, x_m) \in \Bbbk[x_1, \dots, x_m]$ над бесконечным полем $\Bbbk$ тогда и только тогда принимает нулевое значение в каждой точке координатного аффинного пространства $\Bbbk^m$, когда все его коэффициенты нулевые.

Следствие 8.5 (мультипликативность определителя)
В кольце $K = \mathbb{Z}[a_{ij}, b_{ij}]$ выполняется равенство $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Доказательство. Поскольку поле $\mathbb{Q}$ бесконечно, многочлен $\det(AB) - \det(A) \cdot \det(B)$ является нулевым если и только если он принимает нулевое значение во всех точках аффинного пространства $\mathbb{Q}^{2n^2}$ с координатами a_{ij}, b_{ij}, т. е. тогда и только тогда, когда равенство $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ выполняется для всех рациональных матриц A и B. Но для таких матриц оно превращается в равенство (8-5) для линейных операторов

$$F : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^n\,,\; x \mapsto Ax\,, \quad \text{и} \quad G : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^n\,,\; x \mapsto Bx\,,$$

имеющих в стандартном базисе координатного пространства $\mathbb{Q}^n$ матрицы A и B. □

8.1.6. Правило Крамера. Для векторов $v_1, \dots, v_n \in \Bbbk^n$ обозначим через $\det(v_1, \dots, v_n)$ определитель матрицы, составленной из координат этих векторов. Поскольку определитель не меняется при транспонировании, не имеет значения, как записываются координаты — по строкам или по столбцам. Непосредственным обобщением лем. 1.2 на стр. 11 является

Предложение 8.4 (первое правило Крамера)
Векторы $v_1, \dots, v_n$ образуют базис в $\Bbbk^n$ если и только если $\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$, и тогда i-тая координата произвольного вектора $w = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$ в этом базисе равна

$$x_i = \frac{\det\left(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n\right)}{\det(v_1, \dots, v_n)}\,. \tag{8-6}$$

Доказательство. По предл. 5.2 на стр. 64 векторы $v_1, \dots, v_n \in \Bbbk^n$ образуют базис если и только если матрица их координат обратима, что равносильно условию $\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$ по сл. 8.4 на стр. 99. Если $v_1, \dots, v_n$ образуют базис, то у каждого $w \in \Bbbk^n$ есть единственное разложение $w = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$. Применяя к обеим частям этого равенства линейный функционал

$$V \to \Bbbk\,, \quad u \mapsto \det\left(v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_n\right)\,,$$

получаем равенство $\det\left(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n\right) = x_i \cdot \det(v_1, \dots, v_n)$. □

Пример 8.3 (уравнение гиперплоскости)
Пусть n точек $p_1, \dots, p_n$ в аффинном координатном пространстве $\Bbbk^n$ не лежат в одном $(n-2)$-мерном аффинном подпространстве. Тогда, согласно предл. 4.4 на стр. 54 через них проходит единственная гиперплоскость. Точка x лежит в этой гиперплоскости если и только если вектор $\overrightarrow{p_nx} = x - p_n$ линейно выражается через $n-1$ векторов $\overrightarrow{p_np}_1, \dots, \overrightarrow{p_np}_{n-1}$, что равносильно равенству $\det\left(x - p_n,\, p_1 - p_n,\, p_2 - p_n, \dots,\, p_{n-1} - p_n\right) = 0$. В силу полилинейности определителя, это соотношение представляет собою неоднородное линейное уравнение на x, которое можно переписать как $\det\left(x, p_1 - p_n, p_2 - p_n, \dots, p_{n-1} - p_n\right) = \det\left(p_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}\right)$.

Например, в трёхмерном аффинном координатном пространстве $\Bbbk^3$ плоскость $p + \lambda u + \mu v$, проходящая через точку p параллельно векторам u, w, задаётся неоднородным линейным уравнением $\det(x, u, v) = \det(p, u, v)$.

8.2. Присоединённая матрица. Для квадратной матрицы $C = (c_{ij})$ обозначим через C_{ij} подматрицу размера $(n-1)\times(n-1)$, которая получается из C удалением i-й строки и j-го столбца. Число $(-1)^{i+j}\det C_{ij}$ называется *алгебраическим дополнением* к элементу c_{ij} матрицы C. Транспонированная к матрице из алгебраических дополнений матрица

$$C^\vee = \left(c^\vee_{ij}\right)\,, \quad \text{где} \quad c^\vee_{ij} = (-1)^{i+j}\det C_{ji}\,,$$

называется *присоединённой*[1] к матрице C.

Предложение 8.5 (формула для обратной матрицы)
Если матрица $C \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ обратима, то $C^{-1} = \frac{1}{\det C}\, C^\vee$.

Доказательство. Если матрица C обратима, то её столбцы $v_1, \dots, v_n$ образуют базис $\boldsymbol{v}$ координатного пространства $\Bbbk^n$. Стандартный базис $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ пространства $\Bbbk^n$ выражается через него по формуле $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{v}\,C^{-1}$. Таким образом, i-й элемент j-го столбца матрицы C^{-1} является коэффициентом при v_i в разложении вектора e_j по базису $\boldsymbol{v}$. По правилу Крамера он равен

$$\frac{\det\left(v_1, \dots, v_{i-1}, e_j, v_{i+1}, \dots, v_n\right)}{\det C}\,.$$

В числителе стоит определитель матрицы, имеющей в i-м столбце ровно один ненулевой элемент — единицу, стоящую в j-й строке. Переставим её в верхний левый угол, сделав $i-1$ транспозиций столбцов и $j-1$ транспозиций строк:

$$\det\left(v_1, \dots, v_{i-1},\, e_j,\, v_{i+1}, \dots, v_n\right) = (-1)^{i-1}\det\left(e_j, v_1, \dots, v_{i-1},\, v_{i+1}, \dots, v_n\right) =$$
$$= (-1)^{i+j-2}\det\begin{pmatrix} 1 & c_{j,1} & \cdots & c_{j,i-1} & c_{j,i+1} & \cdots & c_{j,n} \\ 0 & c_{1,2} & \cdots & c_{1,i-1} & c_{1,i+1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{j-1,2} & \cdots & c_{j-1,i-1} & c_{j-1,i+1} & \cdots & c_{j-1,n} \\ 0 & c_{j+1,2} & \cdots & c_{j+1,i-1} & c_{j+1,i+1} & \cdots & c_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n,1} & \cdots & c_{n,i-1} & c_{n,i+1} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Ненулевой вклад в этот определитель дают только перестановки, оставляющие 1 на месте. Сумма произведений матричных элементов, отвечающих таким перестановкам, равна определителю $(n-1)\times(n-1)$-матрицы, получающейся удалением j-й строки и i-го столбца из матрицы C. Тем самым, $\det\left(v_1, \dots, v_{i-1}, e_j, v_{i+1}, \dots, v_n\right) = c^\vee_{ij}$. □

[1] По-английски *adjunct*.

Пример 8.4
Матрицы размеров 2×2 и 3×3 с определителем 1 обращаются по формулам

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}) & -(c_{12}c_{33} - c_{13}c_{31}) & (c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}) \\ -(c_{21}c_{33} - c_{23}c_{31}) & (c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31}) & -(c_{11}c_{23} - c_{13}c_{21}) \\ (c_{21}c_{32} - c_{22}c_{31}) & -(c_{11}c_{32} - c_{12}c_{32}) & (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) \end{pmatrix}$$

Для матриц с отличным от единицы определителем все матричные элементы в правых частях надо поделить на определитель матрицы из левой части.

Следствие 8.6 (крайне важное тождество)
Обозначим через $K = \mathbb{Z}[c_{ij}]$ кольцо многочленов от n^2 переменных c_{ij}, где $1 \leqslant i, j \leqslant n$, а через $C = (c_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ матрицу, элементами которой являются эти переменные. В кольце $\mathrm{Mat}_n(K)$ матриц с элементами из K выполняется равенство

$$C \cdot C^{\vee} = C^{\vee} \cdot C = \det(C) \cdot E\,. \tag{8-7}$$

Доказательство. Приравнивая соответственные матричные элементы в правой и левой части равенства (8-7), мы получаем набор из n^2 равенств между многочленами с целыми коэффициентами от переменных c_{ij}. Чтобы доказать каждое такое равенство, достаточно проверить, что оно превращается в верное числовое равенство для всех наборов из n^2 численных значений $c_{ij} \in \mathbb{R}$ из некоторого всюду плотного подмножества в $\mathbb{R}^{n^2}$.

Упражнение 8.3 (по анализу). Убедитесь в этом, а также в том, что для любого ненулевого многочлена $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$ множество $\mathcal{D}(f) = \{p \in \mathbb{R}^m \mid f(p) \neq 0\}$ всюду плотно в $\mathbb{R}^m$.

Таким образом, достаточно проверить равенство (8-7) для всех числовых матриц $C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, имеющих $\det C \neq 0$, что и было сделано в предл. 8.5. □

Следствие 8.7 (разложение определителя по i-й строке или i-у столбцу)
В кольце $n \times n$ матриц $\mathrm{Mat}_n(K)$ с элементами из кольца $K = \mathbb{Z}[c_{ij}]$ выполняется равенство

$$\det C = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} c_{ik} \det C_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} c_{ki} \det C_{ki}\,.$$

Доказательство. Соотношения получаются приравниванием (i, i)-тых диагональных элементов матриц из правой и левой части (8-7). □

Пример 8.5
Раскладывая определитель 3×3 по первому столбцу, получаем

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = c_{11}\left(c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}\right) - c_{21}\left(c_{12}c_{33} - c_{13}c_{32}\right) + c_{31}\left(c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}\right)\,.$$

что согласуется с прямым вычислением из прим. 8.1.

8.2.1. Тождество Гамильтона – Кэли. Для любого коммутативного кольца K с единицей кольцо $n \times n$ матриц $\mathrm{Mat}_n(K[t])$ с элементами из кольца многочленов $K[t]$ совпадает с кольцом многочленов $\mathrm{Mat}_n(K)[t]$ от переменной t с коэффициентами в кольце матриц $\mathrm{Mat}_n(K)$, поскольку каждую матрицу, в клетках которой стоят многочлены от t, можно записать как многочлен от t с матричными коэффициентами и наоборот. Например,

$$\begin{pmatrix} 3t^2+2t & t^3-1 \\ 2t+3 & t^3+t-1 \end{pmatrix} = t^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} .$$

Определение 8.1
Для матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ многочлен

$$\chi_A(t) \overset{\text{def}}{=} \det(tE - A) = t^n - \sigma_1(A) \cdot t^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}(A) \cdot t + (-1)^n \sigma_n(A) \in K[t]$$

называется *характеристическим многочленом* матрицы A. Коэффициент при t^{n-k} в характеристическом многочлене обозначается через $(-1)^k \sigma_k(A)$.

Упражнение 8.4. Убедитесь, что число $\sigma_k(A) \in K$ равно сумме определителей всех таких $k \times k$ подматриц матрицы A, главная диагональ которых является подмножеством главной диагонали матрицы A. В частности, $\sigma_1(A) = \mathrm{tr}(A)$ и $\sigma_n(A) = \det A$.

Теорема 8.1 (тождество Гамильтона – Кэли)
Пусть, как и выше, $K = \mathbb{Z}[a_{ij}]$ является кольцом многочленов от n^2 переменных a_{ij}. Тогда в кольце матриц $\mathrm{Mat}_n(K)$ для матрицы $A = (a_{ij})$ выполняется равенство $\chi_A(A) = 0$.

Доказательство. Подставляя в форм. (8-7) на стр. 102 вместо C матрицу $tE - A$, где E — единичная матрица размера $n \times n$, заключаем, что в кольце $\mathrm{Mat}_n(K[t])$ выполняется равенство

$$\det(tE - A) \cdot E = (tE - A)(tE - A)^\vee ,$$

где $(tE - A)^\vee$ — присоединённая[1] к $(tE - A)$ матрица. Перепишем это равенство в виде равенства между многочленами от t с коэффициентами в кольце матриц $\mathrm{Mat}_n(K)$:

$$t^n \cdot E - \sigma_1(A)\, t^{n-1} \cdot E + \dots + (-1)^n \sigma_n(A) \cdot E = (tE - A)\left(t^m \cdot A_m^\vee + \dots + t \cdot A_1^\vee + A_0^\vee\right) ,$$

где $A_0^\vee, A_1^\vee, \dots , A_m^\vee \in \mathrm{Mat}_n(K)$ — некоторые матрицы. Подставляя в него $t = A$, получаем в кольце $\mathrm{Mat}_n(K)$ равенство $\chi_A(A) \cdot E = 0$, откуда $\chi_A(A) = 0$. □

8.2.2. Однородные системы из n линейных уравнений на $n+1$ неизвестных. Пространство решений системы из n линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n0}x_1 + a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{8-8}$$

[1] См. n° 8.2 на стр. 101.

на $n+1$ неизвестных $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, рассматриваемых как вектор-столбец координатного пространства $\Bbbk^{n+1}$, является аннулятором линейной оболочки строк матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

в двойственном координатном пространстве $\Bbbk^{n+1*}$. Если строки этой матрицы линейно независимы, пространство решений системы (8-8) одномерно, и базисный вектор в этом подпространстве можно указать явно. Для этого обозначим через

$$A_i \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^i \det \begin{pmatrix} a_{1,0} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,0} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \tag{8-9}$$

определитель $n \times n$ матрицы, получающихся из A выкидыванием i-го столбца.

Предложение 8.6 (второе правило Крамера)
Уравнения (8-8) линейно независимы если и только если вектор $a = (A_0, A_1, \dots, A_n) \neq 0$, и в этом случае вектор a порождает одномерное пространство решений системы (8-8).

Доказательство. Допишем к матрице A сверху ещё одну копию её i-той строки. Определитель получившейся матрицы размера $(n+1)\times(n+1)$ равен нулю. Раскладывая его по верхней строке, получаем $a_{i0}A_0 + a_{i1}A_1 + \cdots + a_{in}A_n = 0$. Тем самым, вектор $a = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ в любом случае является решением системы (8-8). Если строки матрицы A линейно зависимы, то и строки всех матриц (8-9) линейно зависимы с теми же самыми коэффициентами. Поэтому все компоненты вектора A в таком случае нулевые. Если же ковекторы $\alpha_i = (a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n})$ линейно независимы в $\Bbbk^{n+1*}$, то по лемме о замене[1] их можно дополнить до базиса в $\Bbbk^{n+1*}$ одним из стандартных базисных ковекторов e_i^*. Определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{10} & \cdots & \cdots & a_{1i} & \cdots & \cdots & a_{ni} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n0} & \cdots & \cdots & a_{ni} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

в строки которой записаны координаты базисных ковекторов $e_i^*, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, отличен от нуля. Раскладывая его по первой строке, видим, что он равен $(-1)^i A_i$, откуда $A_i \neq 0$. □

Пример 8.6 (пересечение аффинных плоскостей в $\Bbbk^3$)
Две непараллельные плоскости, заданные в трёхмерном аффинном координатном пространстве уравнениями

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = c \\ b_1x + b_2y + b_3z = d \end{cases}$$

[1]См. лем. 4.2 на стр. 48.

с непропорциональными левыми частями (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3), пересекаются по прямой с вектором скорости $v = \left(a_2 b_3 - a_3 b_2\,,\ -a_1 b_3 + a_3 b_1\,,\ a_1 b_2 - a_2 b_1\right)$, который является базисным решением системы однородных уравнений

$$\begin{cases} a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0 \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z = 0\,. \end{cases}$$

Если, скажем, первая компонента вектора v ненулевая, то эта прямая проходит через точку p с координатами $(0, p_2, p_3)$, где

$$p_2 = \frac{cb_3 - da_3}{a_2 b_3 - b_2 a_3}\,, \quad p_3 = \frac{a_2 d - b_2 c}{a_2 b_3 - b_2 a_3}$$

это единственное решение системы неоднородных уравнений

$$\begin{cases} a_2 y + a_3 z = c \\ b_2 y + b_3 z = d\,. \end{cases}$$

8.3. Геометрическое отступление: объём и барицентрические координаты. Пусть в аффинном пространстве $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ задан набор из $n+1$ не лежащих в одной гиперплоскости точек $p_0, p_1, \dots, p_n$. Поместим это $\mathbb{A}^n$ внутрь $(n+1)$-мерного аффинного пространства $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(\Bbbk \oplus V)$ в качестве аффинной гиперплоскости $\Pi = (1,0) + V$, проходящей через точку $(1,0) \in \Bbbk \oplus V$ и имеющей направляющее векторное подпространство $V \subset \Bbbk \oplus V$. Рассмотрим в $\mathbb{A}^{n+1}$ аффинный координатный репер с началом в точке $o = (0,0) \in \Bbbk \oplus V$ и базисными векторами $e_0 = \overrightarrow{op}_0$, $e_1 = \overrightarrow{op}_1, \dots, e_n = \overrightarrow{op}_n$. Гиперплоскость $\Pi = \mathbb{A}^n$ проходит через концы этих базисных векторов и задаётся уравнением $x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1$. Координаты $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ точки $a \in \Pi$ в таком репере суть не что иное как *барицентрические координаты*[1] точки a относительно точек p_i, поскольку их сумма равна 1 и центр тяжести точек p_i, взятых с весами x_i, оказывается в точке a, так как $x_0 \overrightarrow{ap}_0 + x_1 \overrightarrow{ap}_1 + \dots + x_n \overrightarrow{ap}_n = \overrightarrow{oa} \cdot \sum x_i - \sum x_i e_i = 0$. Тем самым, мы получаем биекцию между точками $a \in \mathbb{A}^n$ и наборами весов $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ с суммой $\sum x_i = 1$. Основным результатом этого раздела является

Предложение 8.7

Барицентрические координаты $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ точки $a \in \mathbb{A}^n$ относительно набора не лежащих в одной гиперплоскости точек $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{A}^n$ равны отношениям объёмов пар n-мерных ориентированных параллелепипедов, первый из которых натянут на векторы, идущие из точки a во все точки p_ν кроме p_i, а второй — на векторы, идущие из точки p_i во все остальные точки p_ν:

$$x_i = \frac{\det\left(\overrightarrow{ap}_0,\ \dots\ ,\ \overrightarrow{ap}_{i-1},\ \overrightarrow{ap}_{i+1},\ \dots\ ,\ \overrightarrow{ap}_n\right)}{\det\left(\overrightarrow{p_i p}_0,\ \dots\ ,\ \overrightarrow{p_i p}_{i-1},\ \overrightarrow{p_i p}_{i+1},\ \dots\ ,\ \overrightarrow{p_i p}_n\right)}\,. \tag{8-10}$$

8.3.1. Неформальный комментарий. Координата x_i вектора $\overrightarrow{oa}$ в базисе из векторов $e_i = \overrightarrow{op}_i$ вычисляется по правилу Крамера:

$$x_i = \frac{\omega\left(\overrightarrow{op}_0,\ \dots\ ,\ \overrightarrow{op}_{i-1},\ \overrightarrow{oa},\ \overrightarrow{op}_{i+1},\ \dots\ ,\ \overrightarrow{op}_n\right)}{\omega\left(\overrightarrow{op}_0,\ \dots\ ,\ \overrightarrow{op}_n\right)}\,. \tag{8-11}$$

[1] Ср. с n° 1.6.1 на стр. 20.

Над полем $\mathbb{R}$ стоящие в числителе и знаменателе этой формулы объёмы параллелепипедов можно заменить на объёмы пирамид, отсекаемых от этих параллелепипедов гиперплоскостью Π, как на. рис. 8◇3 ниже. Основания этих $(n+1)$-мерных лежат в гиперплоскости Π и представляют собою n-мерные пирамиды с вершинами в точках $p_0, \dots, p_{i-1}, a, p_{i+1}, \dots, p_n$ и в точках $p_0, \dots, p_n$ соответственно. Поскольку пирамиды имеют общую вершину o, их $(n+1)$-мерные объёмы относятся также, как n-мерные объёмы их оснований, что и даёт нужную формулу.

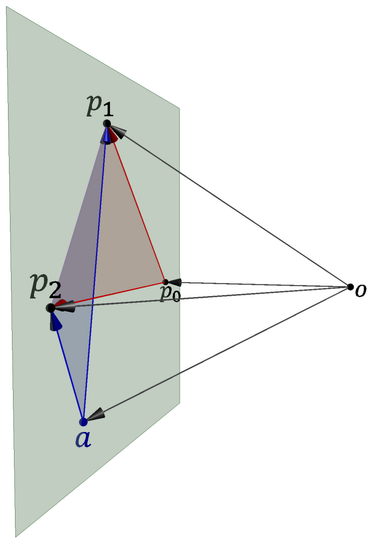
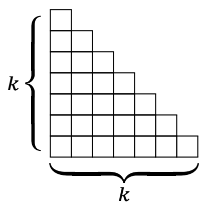


Рис. 8◇3. Барицентрические координаты как отношения объёмов

То, что над полем $\mathbb{R}$ отношение объёма пирамиды, натянутой на линейно независимые векторы, к объёму параллелепипеда, натянутого на те же векторы, не зависит от векторов, а зависит только от размерности их линейной оболочки, можно увидеть следующим образом. Определим n-мерную «ступенчатую пирамиду высоты» k как стопку n-мерных кубиков со стороной 1, лежащих в положительном гипероктанте пространства $\mathbb{R}^n$ на плоскости $x_n = 0$ так, что днища кубиков самого нижнего слоя образуют $(n-1)$-мерную ступенчатую пирамиду высоты k в плоскости $x_n = 0$, днища кубиков следующего, второго снизу этажа образуют $(n-1)$-мерную ступенчатую пирамиду высоты $k-1$ в плоскости $x_n = 1$ и т. д. вплоть до единственного самого верхнего кубика, лежащего на плоскости $x_n = k-1$. Обозначим объём такой пирамиды[1] через Π_k^n. Например, при $n = 2$ двумерная ступенчатая пирамида высоты k имеет вид



и состоит из $\Pi_k^2 = k(k+1)/2$ квадратиков[2]. Трёхмерная пирамида высоты k имеет на нижнем этаже Π_k^2 кубиков, надстраивающих предыдущую картинку вверх вдоль третьей координатной

[1]Т. е. число кубиков, из которых она состоит.

[2]По этой причине число $\Pi_k^2 = \binom{k+1}{2}$ часто называют *k-тым треугольным числом* и обозначают T_k.

оси, её второй этаж состоит из Π^2_{k-1} кубиков, надстраивающих вверх такую же двумерную пирамидку высоты $k-1$ и т. д. Таким образом, трёхмерная пирамида состоит из

$$\Pi^3_k = \Pi^2_1 + \dots + \Pi^2_k = k(k+1)(k+2)/6$$

трёхмерных кубиков.

Упражнение 8.5 (по анализу и комбинаторике). Убедитесь, что

$$\Pi^n_k \stackrel{\text{def}}{=} \Pi^{n-1}_1 + \Pi^{n-1}_2 + \dots + \Pi^{n-1}_k = \binom{n+k-1}{n}$$

и выведите отсюда, что объём вещественного n-мерного параллелепипеда в $n!$ раз больше объёма n-мерной пирамиды с вершинами в какой-нибудь вершине этого параллелепипеда и всех вершинах, соединённые с нею ребром.

Например, площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\overrightarrow{op}_0, \overrightarrow{op}_1$, вдвое больше площади треугольника op_1p_2, а объём трёхмерного параллелепипеда, натянутого на векторы $\overrightarrow{op}_0$, $\overrightarrow{op}_1$, $\overrightarrow{op}_2$, вшестеро больше объёма тетраэдра $op_1p_2p_3$ и т. д. Поэтому над произвольным полем $\Bbbk$ характеристики нуль уместно называть величину $\omega(\overrightarrow{op}_1, \dots, \overrightarrow{op}_n)/n!$ *объёмом ориентированного n-мерного симплекса* $[op_1 \dots p_n]$ с вершинами в точках $o, p_1, \dots, p_n$. Такой симплекс представляет собою пирамиду, которая отрезается от натянутого на векторы $\overrightarrow{op}_1, \dots, \overrightarrow{op}_n$ параллелепипеда с вершиной в точке o гиперплоскостью, проходящей через вершины $p_1, \dots, p_n$. Из лем. 8.3 ниже вытекает, что объёмы $(n+1)$-мерных пирамид с общей вершиной и лежащими в одной n-мерной гиперплоскости основаниями относятся точно также, как n-мерные объёмы этих оснований. И хотя доказательство этой леммы, как и доказательство предл. 8.7, совершенно не используют объёмы пирамид и работают над любым полем, описанную только что картинку всё-таки полезно держать в голове.

Лемма 8.3
Для любого k-мерного подпространства U в m-мерном векторном пространстве W и таких векторов $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k \in U$ и $w_1, \dots, w_{m-k} \in W$, что векторы $w_1, \dots, w_{m-k}, u_1, \dots, u_k$ составляют базис пространства W, выполняется равенство

$$\frac{\omega_m(w_1, \dots, w_{m-k},\ v_1, \dots, v_k)}{\omega_m(w_1, \dots, w_{m-k},\ u_1, \dots, u_k)} = \frac{\omega_k(v_1, \dots, v_k)}{\omega_k(u_1, \dots, u_k)}, \tag{8-12}$$

в котором ω_k и ω_m суть любые ненулевые формы k-мерного и m-мерного объёмов в пространствах U и W соответственно.

Доказательство. Из сделанных предположений вытекает, что векторы $u_1, \dots, u_k$ линейно независимы и составляют базис в U. Согласно предл. 8.4 на стр. 100,

$$\omega_m(w_1, \dots, w_{m-k},\ u_1, \dots, u_k) \neq 0 \quad \text{и} \quad \omega_k(u_1, \dots, u_k) \neq 0\,.$$

Определим на подпространстве U ещё одну форму объёма ω' равенством

$$\omega'(v'_1, \dots, v'_k) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_m(w_1, \dots, w_{m-k},\ v'_1, \dots, v'_k)$$

для любых векторов $v'_1, \dots, v'_k \in U$.

Упражнение 8.6. Убедитесь, что это действительно ненулевая форма объёма на U.

Поскольку ненулевая форма объёма единственна с точностью до пропорциональности и отлична от нуля на базисе $u_1, \dots, u_k$,

$$\frac{\omega_k(v_1,\dots,v_k)}{\omega_k(u_1,\dots,u_k)} = \frac{\omega'(v_1,\dots,v_k)}{\omega'(u_1,\dots,u_k)} = \frac{\omega_m(w_1,\dots,w_{m-k},\, v_1,\dots,v_k)}{\omega_m(w_1,\dots,w_{m-k},\, u_1,\dots,u_k)}\,.$$

□

8.3.2. Доказательство предл. 8.7. Для каждого $\nu \neq i$ подставим в числитель дроби из формулы (8-11) разложения $\overrightarrow{op}_\nu = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ap}_\nu$ и, пользуясь тем, что объём полилинеен и зануляется на линейно зависимых векторах, преобразуем этот числитель к виду

$$\omega\left(\overrightarrow{ap}_0,\, \dots\,,\, \overrightarrow{ap}_{i-1},\, \overrightarrow{oa},\, \overrightarrow{ap}_{i+1},\, \dots\,,\, \overrightarrow{ap}_n\right)\,.$$

Аналогично, подставляя в знаменатель $\overrightarrow{op}_\nu = \overrightarrow{op}_i + \overrightarrow{p_ip}_\nu$ для всех $\nu \neq i$, преобразуем его в

$$\omega\left(\overrightarrow{p_ip}_0,\, \dots\,,\, \overrightarrow{p_ip}_{i-1},\, \overrightarrow{op_i},\, \overrightarrow{p_ip}_{i+1},\, \dots\,,\, \overrightarrow{p_ip}_n\right)\,.$$

Так как $\overrightarrow{op}_i$ отличается от $\overrightarrow{oa}$ на линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{p_ip}_\nu$, знаменатель равен

$$\omega\left(\overrightarrow{p_ip}_0,\, \dots\,,\, \overrightarrow{p_ip}_{i-1},\, \overrightarrow{oa},\, \overrightarrow{p_ip}_{i+1},\, \dots\,,\, \overrightarrow{p_ip}_n\right)\,,$$
$$\text{а}\quad x_i = \frac{\omega\left(\overrightarrow{ap}_0,\, \dots\,,\, \overrightarrow{ap}_{i-1},\, \overrightarrow{oa},\, \overrightarrow{ap}_{i+1},\, \dots\,,\, \overrightarrow{ap}_n\right)}{\omega\left(\overrightarrow{p_ip}_0,\, \dots\,,\, \overrightarrow{p_ip}_{i-1},\, \overrightarrow{oa},\, \overrightarrow{p_ip}_{i+1},\, \dots\,,\, \overrightarrow{p_ip}_n\right)}\,.$$

Остаётся применить лем. 8.3 для $k = n$, $U = V$, $m = n+1$, $W = \Bbbk \oplus V$, $w_1 = \overrightarrow{oa}$, $u_\nu = \overrightarrow{p_ip}_\nu$ и $v_\nu = \overrightarrow{ap}_\nu$, где ν пробегает отличные от i значения от 0 до n.

8.4. Комбинаторное отступление: длина и знак перестановки. Перестановку $(g_1, \dots, g_n)$ чисел $(1, \dots, n)$ можно воспринимать как биективное отображение

$$g : \{1,\dots,n\} \xrightarrow{\sim} \{1,\dots,n\}\,,\quad i \mapsto g_i\,.$$

Все такие биекции образуют группу преобразований, которая обозначается S_n и называется *n-той симметрической группой*. Назовём пару возрастающих чисел $i < j$ *инверсной* для перестановки $g = (g_1, \dots, g_n) \in S_n$, если $g_i > g_j$. Таким образом, каждая перестановка $g \in S_n$ разбивает множество всех $n(n-1)/2$ возрастающих пар $1 \leqslant i < j \leqslant n$ на два непересекающихся подмножества — инверсные пары и неинверсные пары. Количество $\ell(g)$ инверсных пар перестановки g называется *числом инверсий* или *длиной* перестановки g.

Упражнение 8.7. Найдите $\max \ell(g)$ по всем $g \in S_n$ и укажите все перестановки на которых он достигается.

Число $\operatorname{sgn}(g) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\ell(g)}$ называется *знаком* перестановки g. Перестановка g называется *чётной*, если $\operatorname{sgn}(g) = 1$ и *нечётной*, если $\operatorname{sgn}(g) = -1$.

Перестановка, меняющая местами какие-либо два элемента i, j и оставляющая все остальные элементы на месте, обозначается σ_{ij} и называется *транспозицией* i-го и j-го элементов.

Упражнение 8.8. Убедитесь, что каждая перестановка $g \in S_n$ является композицией транспозиций.

Обратите внимание, что разложение перестановки в композицию транспозиций не единственно: например, транспозицию $\sigma_{13} = (3, 2, 1) \in S_3$ иначе можно записать как $\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}$ или как

$\sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}$. Тем не менее чётность количества транспозиций, в композицию которых раскладывается данная перестановка g, не зависит от способа разложения и совпадает с чётностью числа инверсных пар перестановки g, т. е. все чётные перестановки являются композициями чётного числа транспозиций, а нечётные — нечётного. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 8.4
$\operatorname{sgn}(g\sigma_{ij}) = -\operatorname{sgn}(g)$ для любой перестановки $g = (g_1, \dots, g_n)$ и любой транспозиции σ_{ij}.

Доказательство. Перестановки

$$\begin{aligned} g &= \big(g_1, \dots, g_{i-1}, \boldsymbol{g}_i, g_{i+1}, \dots, g_{j-1}, \boldsymbol{g}_j, g_{j+1}, \dots, g_n\big) \\ g\sigma_{ij} &= \big(g_1, \dots, g_{i-1}, \boldsymbol{g}_j, g_{i+1}, \dots, g_{j-1}, \boldsymbol{g}_i, g_{j+1}, \dots, g_n\big) \end{aligned} \tag{8-13}$$

отличаются друг от друга транспозицией элементов g_i и g_j, стоящих на i-том и j-том местах перестановки g. В этих двух перестановках пара (i, j), а также $2(j - i - 1)$ пар вида (i, m) и (m, j) с произвольным m из промежутка $i < m < j$ имеют противоположную инверсность, а инверсность всех остальных пар одинакова. □

Следствие 8.8
Если перестановка g является композицией m транспозиций, то $\operatorname{sgn}(g) = (-1)^m$ и чётность перестановки совпадает с чётностью числа m.

Доказательство. Тождественная перестановка не имеет инверсных пар и, стало быть, чётна. В силу леммы, перестановка получающаяся из тождественной умножением на m транспозиций, имеет чётность $(-1)^m$. □

Упражнение 8.9. Убедитесь, что $\operatorname{sgn}(gh) = \operatorname{sgn}(g)\operatorname{sgn}(h)$, т. е. отображение $\operatorname{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$ является гомоморфизмом групп.

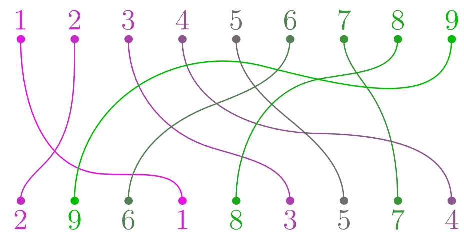


Рис. 8◇4. $\operatorname{sgn}(2, 9, 6, 1, 8, 3, 5, 7, 4) = +1$ (всего 18 пересечений).

Пример 8.7 (правило ниточек)
Чётность числа инверсных пар может быть определена следующим наглядным способом, известным как *правило ниточек*[1]. Запишем исходные числа и их перестановку друг под другом, как на рис. 8◇4, и соединим одинаковые числа нитями так, чтобы ни одна из нитей не вылезала за пределы прямоугольника, образованного четырьмя угловыми числами, и чтобы все точки

[1]Этот способ не слишком эффективен, когда требуется отыскать знак конкретной перестановки длинного набора чисел — обычно быстрее бывает разложить перестановку в композицию непересекающихся циклов и воспользоваться тем, что циклы чётной длины нечётны, а циклы нечётной длины чётны. Однако правило ниточек часто оказывается полезным при анализе абстрактных перестановок.

пересечения нитей были простыми двойными[1]. Тогда чётность числа инверсных пар равна чётности числа точек пересечения нитей.

Упражнение 8.10. Докажите это и найдите при помощи правила ниточек чётность *тасующей перестановки* $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_m)$, где номера в каждом из наборов $(i_1, \dots, i_k)$ и $(j_1, \dots, j_m)$ возрастают слева направо.

8.5. Алгебраическое отступление: грассмановы многочлены. Полезным алгебраическим инструментом для работы с кососимметричными формами и определителями является алгебра $\Bbbk\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ *грассмановых многочленов* от переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$ с коэффициентами из поля $\Bbbk$. Она определяется также, как и обычная алгебра многочленов, вот только грассмановы переменные ξ_i не коммутируют, но *антикоммутируют*[2] друг с другом, т. е.

$$\forall\, i,j \quad \xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i \quad \text{и} \quad \forall\, i \quad \xi_i \wedge \xi_i = 0\,, \tag{8-14}$$

где символ «$\wedge$» обозначает кососимметричное грассманово умножение, дабы отличать его от обычного коммутативного. Поскольку квадраты грассмановых переменных равны нулю, всякий ненулевой грассманов моном *линеен* по каждой входящей в него переменной. Иначе говоря, базис векторного пространства $\Bbbk\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ над $\Bbbk$ образуют грассмановы мономы

$$\xi_I \overset{\text{def}}{=} \xi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{i_m}\,, \tag{8-15}$$

занумерованные всевозможными наборами возрастающих номеров $I = (i_1, \dots, i_n) \subseteq \{1, \dots, n\}$, включая $I = \varnothing$, для которого $\xi_\varnothing \overset{\text{def}}{=} 1$. Перестановка переменных в базисном мономе (8-15) равносильна его умножению на знак этой перестановки: $\xi_{i_{g(1)}} \wedge \ldots \wedge \xi_{i_{g(m)}} = \mathrm{sgn}(g) \cdot \xi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{i_m}$ для всех $g \in S_n$. Перемножаются мономы (8-15) по правилу

$$\xi_I \wedge \xi_J = \begin{cases} \mathrm{sgn}(I,J) \cdot \xi_{I \sqcup J} & \text{если } I \cap J = \varnothing \\ 0 & \text{если } I \cap J \neq \varnothing\,, \end{cases} \tag{8-16}$$

где $\mathrm{sgn}(I,J) = \pm 1$ означает знак *тасующей перестановки*, которая расставляет в порядке возрастания номера $i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_k$, среди которых $i_1, \dots, i_m$ и $j_1, \dots, j_k$ по отдельности строго возрастают. Для дополнительных наборов $I = (i_1, \dots, i_n)$ и $J = \{1, \dots, n\} \smallsetminus I$ этот знак был вычислен в упр. 8.10 на стр. 110 и равен $(-1)^{i_1 + \dots + i_m + m(m+1)/2}$.

Однородные грассмановы многочлены степени k образуют векторное пространство размерности $\binom{n}{k}$, базис в котором составляют мономы (8-15), отвечающие всевозможным k-элементным подмножествам I. Размерность всей грассмановой алгебры $\dim \Bbbk\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle = 2^n$. Грассмановы мономы произвольных степеней m и k коммутируют друг с другом по правилу

$$\left(\xi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{i_m}\right) \wedge \left(\xi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{j_k}\right) = (-1)^{km} \left(\xi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{j_k}\right) \wedge \left(\xi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{i_m}\right)\,,$$

ибо при переносе каждой из k переменных ξ_j через m переменных ξ_i происходит m транспозиций. Поэтому для любых двух однородных грассмановых многочленов η и ω

$$\eta \wedge \omega = (-1)^{\deg\eta \deg\omega}\, \omega \wedge \eta\,. \tag{8-17}$$

[1] Т. е. в каждой точке пересечения встречается ровно две нити, причём их касательные в точке пересечения различны.

[2] Если $\mathrm{char}\,\Bbbk \neq 2$ соотношения $\xi_i \wedge \xi_i = 0$ вытекают из соотношений $\xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i$ и могут быть опущены. Однако когда $\mathrm{char}\,\Bbbk = 2$ именно соотношения на квадраты $\xi_i \wedge \xi_i = 0$ отличает грассмановы переменные от обычных коммутативных.

В частности, каждый однородный многочлен чётной степени коммутирует со всеми грассмановыми многочленами. Отметим также, что единственный с точностью до знака моном старшей степени $\xi_{\text{top}} \overset{\text{def}}{=} \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n$ аннулируется умножением на любой грассманов многочлен с нулевым свободным членом.

Упражнение 8.11. Опишите *центр*[1] грассмановой алгебры.

8.5.1. Грассманова алгебра векторного пространства. Если в векторном пространстве V выбран базис $e_1, \ldots, e_n$, алгебра грассмановых многочленов $\Bbbk\langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ от базисных векторов пространства V обозначается ΛV и называется *грассмановой* (или *внешней*) алгеброй векторного пространства V. Не апеллирующие к выбору базиса название и обозначение вызваны тем, что пространство однородных грассмановых многочленов степени 1 канонически отождествляется с пространством V и не зависит от выбора базиса, а пространство однородных грассмановых многочленов степени k является линейной оболочкой всевозможных произведений $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$ из k произвольных векторов $v_i \in V$ и тоже не зависит от выбора базиса. Обозначая пространство однородных грассмановых многочленов степени k через $\Lambda^k V$, мы получаем разложение алгебры ΛV в прямую сумму векторных пространств

$$\Lambda V = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k V\,,$$

где $\Lambda^0 V \overset{\text{def}}{=} \Bbbk \cdot 1$ обозначает одномерное пространство констант, тоже не зависящее от базиса.

Пример 8.8 (грассмановы квадратичные формы)
Покажем, что каждый ненулевой однородный грассманов многочлен второй степени $\omega \in \Lambda^2 V$ на конечномерном пространстве V над любым полем $\Bbbk$ в подходящем базисе $\boldsymbol{e}$ пространства V может быть записан в *нормальном виде Дарбу*

$$e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \ldots + e_{2r-1} \wedge e_{2r}\,. \tag{8-18}$$

Для этого рассмотрим произвольный базис $\boldsymbol{u}$ и перенумеруем его векторы так, чтобы

$$\omega = u_1 \wedge (\alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n) + u_2 \wedge (\beta_3 u_3 + \ldots + \beta_n u_n) + (\text{члены без } u_1 \text{ и } u_2)\,,$$

где коэффициент $\alpha_2 \neq 0$ и вектор $v_2 \overset{\text{def}}{=} \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n \neq 0$. Перейдём к новому базису $\boldsymbol{v}$ из векторов $v_i = u_i$ при $i \neq 2$ и вектора v_2.

Упражнение 8.12. Убедитесь, что это действительно базис.

Подставляя в предыдущую формулу $u_2 = \big(v_2 - \alpha_3 v_3 - \ldots - \alpha_n v_n\big)/\alpha_2$, получаем

$$\begin{aligned} \omega = v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge (\gamma_3 v_3 + \ldots + \gamma_n v_n) + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2) = \\ = (v_1 - \gamma_3 v_3 - \ldots - \gamma_n v_n) \wedge v_2 + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2) \end{aligned}$$

для некоторых $\gamma_3, \ldots, \gamma_n \in \Bbbk$. Переходя к базису $\boldsymbol{w}$ из векторов $w_1 = v_1 - \gamma_3 v_3 - \ldots - \gamma_n v_n$ и $w_i = v_i$ при $i \neq 1$, получаем $\omega = w_1 \wedge w_2 + (\text{члены без } w_1 \text{ и } w_2)$, после чего процесс может быть продолжен по индукции.

[1] Т. е. подалгебру, состоящую из всех грассмановых многочленов, которые коммутируют со всеми грассмановыми многочленами.

Предложение 8.8
Над полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ однородный грассманов многочлен $\omega \in \Lambda^2 V$ тогда и только тогда разложим в произведение $u \wedge w$ двух векторов $u, w \in V$, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

Доказательство. Если $\omega = u \wedge w$, то $\omega \wedge \omega = u \wedge w \wedge u \wedge w = 0$. Чтобы получить обратное, выберем в V базис $\boldsymbol{e}$, в котором $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \cdots$. Если в этой сумме есть хотя бы два слагаемых, то базисный моном $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ войдёт в $\omega \wedge \omega$ с ненулевым коэффициентом 2, а значит, $\omega \wedge \omega \neq 0$. Таким образом, равенство $\omega \wedge \omega = 0$ влечёт равенство $\omega = e_1 \wedge e_2$. □

8.5.2. Линейные замены переменных. Если векторы $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_\ell)$ линейно выражены через векторы $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_k)$ по формуле $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}\, C$, где $C = (c_{ij}) \in \operatorname{Mat}_{k\times\ell}(\Bbbk)$, то их грассмановы произведения $u_J = u_{j_1} \wedge \ldots \wedge u_{j_m}$ линейно выражаются через грассмановы произведения $w_I = w_{i_1} \wedge \ldots \wedge w_{i_m}$ по формулам

$$u_J = u_{j_1} \wedge \ldots \wedge u_{j_m} = \Big(\sum_{i_1} w_{i_1} c_{i_1 j_1}\Big) \wedge \Big(\sum_{i_2} w_{i_2} c_{i_2 j_2}\Big) \wedge \ldots \wedge \Big(\sum_{i_m} w_{i_m} c_{i_m j_m}\Big) =$$
$$= \sum_{1\leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqslant n} w_{i_1} \wedge \ldots \wedge w_{i_n} \cdot \sum_{g\in S_m} \operatorname{sgn}(g)\, c_{i_{g(1)} j_1} c_{i_{g(2)} j_2} \ldots c_{i_{g(n)} j_n} = \sum_I w_I \cdot c_{IJ}\,,$$

где $c_{IJ} = \det C_{IJ}$ обозначает определитель $m \times m$-подматрицы $C_{IJ} \subset C$, сосредоточенной в пересечениях столбцов с номерами из J и строк с номерами из I, а суммирование происходит по всем наборам $I = (i_1, \dots, i_m)$ из m строго возрастающих номеров. Определитель $c_{IJ} = \det C_{IJ}$ называется IJ-тым *минором* m-того порядка в матрице C. Таким образом, IJ-тый элемент матрицы, выражающей грассманов моном u_J через грассмановы мономы w_I равен IJ-тому минору m-того порядка в матрице выражающей векторы $\boldsymbol{u}$ через векторы $\boldsymbol{w}$. В частности, если наборы векторов $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_n)$ оба являются базисами пространства V, то базисные грассмановы мономы e_J пространства $\Lambda^m V$ выражаются через базисные мономы f_I при помощи матрицы перехода размера $\binom{m}{n} \times \binom{m}{n}$, у которой в позиции IJ стоит IJ-тый минор $\big(c_{IJ}\big)$ матрицы $C_{\boldsymbol{fe}}$, выражающей $\boldsymbol{e}$ через $\boldsymbol{f}$. Эта матрица обозначается $\Lambda^m C_{\boldsymbol{fe}}$ и называется m-той *внешней степенью* матрицы $C_{\boldsymbol{fe}}$.

8.5.3. Соотношения Лапласа. Для набора $J = (j_1, \dots, j_m) \subset \{1, \dots, n\}$ возрастающих номеров мы полагаем $\deg J \overset{\text{def}}{=} m$, $|J| \overset{\text{def}}{=} j_1 + \ldots + j_m$, и обозначаем дополнительный к J набор номеров через $\hat{J} = \big(\hat{j}_1, \dots, \hat{j}_{n-m}\big) = \{1, \dots, n\} \smallsetminus J$. Рассмотрим произвольную квадратную матрицу $A \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$, столбцы которой обозначим $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и будем воспринимать их как векторы координатного пространства $\Bbbk^n$. Матрица A является матрицей перехода от этих векторов к стандартному базису $e_1, \dots, e_n$ пространства $\Bbbk^n$. Для любых двух мультииндексов I, J одинаковой степени $\deg I = \deg J = m$ грассмановы мономы $\alpha_J = \alpha_{j_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{j_m}$ и $\alpha_{\hat{I}} = \alpha_{\hat{i}_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{\hat{i}_{n-m}}$ имеют дополнительные степени m и $n - m$ и перемножаются по правилу[1]

$$\alpha_J \wedge \alpha_{\hat{I}} = \begin{cases} (-1)^{|J| + \frac{m(m+1)}{2}} \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J\,. \end{cases} \tag{8-19}$$

Выражая мономы α_J и $\alpha_{\hat{I}}$ в левой части (8-19) через базисные мономы e_K, получаем

$$\Big(\sum_K e_K a_{KJ}\Big) \wedge \Big(\sum_L e_L a_{L\hat{I}}\Big) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \sum_K (-1)^{|K|} a_{KJ} a_{\hat{K}\hat{I}}\,,$$

[1]См. форм. (8-16) на стр. 110 и упр. 8.10 на стр. 110

где K пробегает все возрастающие мультииндексы длины $\deg K = m$. Так как правая часть (8-19) при $I = J$ равна $(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+|J|} \det A \cdot e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$, для любых двух наборов J, I из m строк произвольной квадратной матрицы A выполняются *соотношения Лапласа*

$$\sum_K (-1)^{|K|+|J|} a_{KJ} a_{\hat{K}\hat{I}} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J\,, \end{cases} \tag{8-20}$$

где суммирование идёт по всем наборам K из $m = \deg K$ строк матрицы A.

При $I = J$ соотношение (8-20) даёт формулу для вычисления определителя[1]

$$\det A = \sum_K (-1)^{|K|+|J|} a_{KJ} a_{\hat{K}\hat{J}} \tag{8-21}$$

через всевозможные миноры a_{KJ} порядка m, сосредоточенные в m фиксированных столбцах матрицы A с номерами J, и *дополнительные* к ним миноры $a_{\hat{J}\hat{K}}$ порядка $n - m$, равные определителям матриц, получающихся из A вычёркиванием всех строк и столбцов, которые высекают минор a_{KJ}. Произведение $(-1)^{|K|+|J|} a_{\hat{K}\hat{J}}$ называется *алгебраическим дополнением* к минору a_{KJ} и обозначается $\hat{a}_{KJ}$.

Упражнение 8.13. Для любых матриц $A \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$, $C \in \mathrm{Mat}_m(\Bbbk)$, $B \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\Bbbk)$ покажите, что $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C$.

При $I \neq J$ соотношение (8-20) имеет вид $\sum_K a_{KJ} \hat{a}_{IK} = 0$ и называется *теоремой об умножении на чужие алгебраические дополнения*, поскольку его левая часть отличается от левой части формулы (8-21) тем, что миноры a_{KJ} умножаются не на свои алгебраические дополнения $\hat{a}_{KJ}$, а на дополнения $\hat{a}_{IK}$ к минорам a_{IK}, сосредоточенным в другом наборе столбцов $I \neq J$.

Если согласованно занумеровать все m-элементные подмножества и все $(n-m)$-элементные подмножества в множестве $\{1, \ldots, n\}$ так, чтобы дополнительные подмножества J и $\hat{J}$ имели одинаковые номера, то соотношения Лапласа можно записать одним равенством

$$\Lambda^m A \cdot \Lambda^{n-m} \hat{A}^t = \det A \cdot E \tag{8-22}$$

на матрицы размера $\binom{n}{m} \times \binom{n}{m}$, в котором (IJ)-тый элемент матрицы $\Lambda^{n-m}\hat{A}^t$ равен

$$\hat{a}_{JI} = (-1)^{|J|+|I|} a_{\hat{J}\hat{I}}\,.$$

Упражнение 8.14. Установите транспонированный вариант соотношений Лапласа

$$\sum_K a_{JK} \hat{a}_{IK} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J \end{cases} \tag{8-23}$$

Пример 8.9 (соотношение Плюккера)

Рассмотрим 2×4 матрицу $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{2\times 4}(\Bbbk)$ и обозначим через A_{ij} её 2×2 минор, образованный i-м и j-м столбцами. Шесть чисел A_{ij} связаны квадратичным *соотношением Плюккера*

$$A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23} = 0\,, \tag{8-24}$$

[1] С геометрической точки зрения эта формула вычисляет объём n-мерного параллелепипеда через объёмы его m-мерных и $(n-m)$-мерных граней.

которое получается если разложить по первым двум строкам равный нулю определитель 4×4 матрицы $\begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}$.

Упражнение 8.15. Убедитесь в этом и для любых шести чисел A_{ij}, удовлетворяющих соотношению (8-24), явно предъявите 2×4 матрицу A с 2×2 минорами A_{ij}.

Это согласуется с предл. 8.8 на стр. 112: если обозначить через e_1, e_2, e_3, e_4 стандартный базис координатного пространства $\Bbbk^4$, то квадратичная форма $\omega = \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant 4} A_{ij} \cdot e_i \wedge e_j$ имеет квадрат $\omega \wedge \omega = 2(A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23}) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$, и по предл. 8.8 соотношение (8-24) означает, что $\omega = a_1 \wedge a_2$ для некоторых векторов

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3 + a_{14}e_4 \\ a_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3 + a_{24}e_4 \,, \end{aligned}$$

но $a_1 \wedge a_2 = \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant 4} \det \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix} \cdot e_i \wedge e_j$ имеет коэффициентами как раз 2×2 миноры 2×4 матрицы, составленной из координат векторов a_1 и a_2.

Пример 8.10 (определитель пучка матриц)

Линейная оболочка пары непропорциональных квадратных матриц $A, B \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\Bbbk)$ называется *пучком матриц* и обозначается (AB). Таким образом, всякая матрица из пучка (AB) имеет вид $t_0A + t_1B$, где $t_0, t_1 \in \Bbbk$, а её определитель $\det(t_0A + t_1B)$ является однородным многочленом степени n от t_0, t_1. Покажем, что коэффициент этого многочлена при $t_0^k t_1^{n-k}$ равен

$$\sum_{IJ} a_{IJ} \hat{b}_{IJ} \,, \tag{8-25}$$

где суммирование идёт по всем k-элементным подмножествам $I, J \subset \{1, \dots, n\}$.

Для этого обозначим через $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$ столбцы матриц A и B, понимаемые как векторы координатного пространства $\Bbbk^n$ со стандартным базисом $e_1, \dots, e_n$. Тогда

$$(t_0a_1 + t_1b_1) \wedge \ldots \wedge (t_0a_n + t_1b_n) = \det(t_0A + t_1B)\, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \,.$$

Моном $t_0^k t_1^{n-k}$ возникает в левой части при выборе первого слагаемого в каких-нибудь k из перемножаемых скобок и второго слагаемого в остальных $n-k$ скобках. Если обозначить номера этих k скобок через $I = (i_1, \dots, i_k)$ то вклад в коэффициент при $t_0^k t_1^{n-k}$ будет равен

$$\begin{aligned} (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+|I|} a_I \wedge b_{\hat{I}} &= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+|I|} \Big(\sum_J e_J a_{JI}\Big) \wedge \Big(\sum_K e_K b_{K\hat{I}}\Big) = \\ &= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+|I|} \sum_{JK} e_J \wedge e_K \cdot a_{JI} b_{K\hat{I}} = e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \cdot \sum_J (-1)^{|I|+|J|} a_{JI} b_{\hat{J}\hat{I}} \,. \end{aligned}$$

Полный коэффициент при $t_0^k t_1^{n-k}$ в $\det(t_0A + t_1B)$ получается суммированием таких подобных слагаемых по всем наборам I из k возрастающих номеров, что и даёт формулу (8-25). В обозначениях из (8-22) её можно переписать в виде

$$\det(t_0A + t_1B) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{tr}\left(\Lambda^k A \cdot \Lambda^{n-k} \hat{B}^t\right) t_0^k t_1^{n-k} \,. \tag{8-26}$$

Упр. 8.2. При $m = 1$ ненулевой многочлен $f(x_1) \in \Bbbk[x_1]$ имеет не более $\deg f$ корней и, тем самым, не обращается в нуль почти во всех точках бесконечной прямой $\Bbbk^1$. При $m > 1$ перепишите многочлен $f(x_1, \dots, x_m)$ в виде многочлена от x_m с коэффициентами из $\Bbbk[x_1, \dots, x_{m-1}]$ и примените индукцию по m.

Упр. 8.3. Так как разность двух многочленов является непрерывной функцией, из того, что она обращается в нуль на всюду плотном подмножестве, вытекает, что она равна нулю всюду, а поскольку поле $\mathbb{R}$ бесконечно, многочлен от n^2 переменных, принимающий нулевые значения во всех точках аффинного пространства $\mathbb{R}^{n^2}$, является нулевым многочленом[1]. Всюду плотность множества $\mathcal{D}(f)$ означает, что в любой ε-окрестности[2] каждой точки $p \in \mathbb{R}^m$ найдётся точка $r \neq p$, в которой $f(r) \neq 0$. Так как многочлен f ненулевой, имеется точка $q \in \mathbb{R}^m$ с $f(q) \neq 0$. Ограничение f на прямую (pq), будучи ненулевым многочленом от одной переменной, обращается в нуль лишь в конечном числе точек.

Упр. 8.5. Равенство $\Pi_k^n = \binom{n+k-1}{n}$ доказывается индукцией по n при помощи суммирования по треугольнику Паскаля. При фиксированной размерности n предел $\lim\limits_{k\to\infty} \binom{n+k-1}{n}/k^n = 1/n!$.

Упр. 8.7. $\max \ell(g) = n(n-1)/2$ достигается на единственной перестановке $(n,\ n-1, \dots, 1)$.

Упр. 8.8. Индукция по n. Каждая перестановка $g = (g_1, \dots, g_n)$ является композицией $g = \sigma \circ g'$ транспозиции σ, переставляющей между собою элементы n и g_n, и перестановки $g' = \sigma \circ g$, оставляющей элемент n на месте. По индукции, g' раскладывается в композицию транспозиций, не затрагивающих элемент n.

Упр. 8.10. Если все точки пересечения двойные и трансверсальные, две нити, выходящие из элементов i и j пересекаются между собою нечётное число раз если и только если (i, j) инверсна[3]. Знак тасующей перестановки $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_m)$ равен $(-1)^{|I| + \frac{1}{2}k(k+1)}$, где *вес* $|I| \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{\nu} i_\nu$. Действительно, нити, выходящие из чисел $i_1, \dots, i_k$ верхней строчки не пересекаются между собою и пересекают, соответственно, $i_1 - 1$, $i_2 - 2$, …, $i_k - k$ начинающихся левее нитей, выходящих из j-точек и тоже между собою не пересекающихся.

Упр. 8.11. При чётном n центр алгебры $\Bbbk\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ линейно порождается мономами чётных степеней, при нечётном n — мономами чётных степеней и старшим мономом $\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n$, степень которого нечётна.

Упр. 8.13. Разложите определитель по первым n столбцам.

Упр. 8.14. Это сразу следует из равенства $\det A = \det A^t$.

Упр. 8.15. Если $A_{12} \neq 0$, то можно взять

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -A_{23}/A_{12} & -A_{24}/A_{12} \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \end{pmatrix}.$$

Равенство

$$A_{34} = \det \begin{pmatrix} -A_{23}/A_{12} & -A_{24}/A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{pmatrix}$$

[1] См. упр. 8.2 на стр. 100.

[2] Под ε-окрестностью точки $p \in \mathbb{R}^m$ мы понимаем m-мерный куб с центром в точке p и стороной 2ε.

[3] В действительности картинку всегда можно нарисовать так, чтобы в этом случае была ровно одна точка пересечения.

эквивалентно квадратичному соотношению Плюккера[1].

[1] См. формулу (8-24) на стр. 113.