§6. Метод Гаусса

6.1. Построение базиса в подпространстве. Рассмотрим n-мерное координатное векторное пространство $\Bbbk^n$, векторы которого будем записывать в виде строк $(x_1, \dots, x_n)$. Сопоставим каждому набору векторов $w_1, \dots, w_m \in \Bbbk^n$ матрицу размера $m \times n$, по строкам которой выписаны координаты этих векторов и которую мы будем называть *матрицей координат* векторов w_i. Метод Гаусса позволяет построить в линейной оболочке U произвольного заданного набора векторов $w_1, \dots, w_m \in \Bbbk^n$ базис $u_1, \dots, u_r$, матрица координат которого имеет *приведённый ступенчатый вид*. Последнее по определению означает, что в каждой строке этой матрицы самый левый ненулевой элемент равен единице, располагается строго правее, чем в предыдущей строке и является единственным ненулевым элементом своего столбца. Например, матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6-1}$$

является приведённой ступенчатой при любом выборе элементов, стоящих на отмеченных звёздочками местах.

Упражнение 6.1. Убедитесь, что ненулевые строки любой приведённой ступенчатой матрицы линейно независимы и, тем самым, образуют базис своей линейной оболочки.

Столбцы, содержащие самые левые ненулевые координаты базисных векторов $u_1, \dots, u_r$ называются *базисными столбцами* приведённой ступенчатой матрицы. Их номера $j_1, \dots, j_r$ строго возрастают, а сами они образуют единичную подматрицу размера $r \times r$. В матрице (6-1) базисными являются столбцы с номерами 2, 4, 7 и 9.

Упражнение 6.2. Убедитесь, что базисные столбцы линейно независимы и образуют базис в линейной оболочке столбцов приведённой ступенчатой матрицы.

Базис с приведённой ступенчатой матрицей координат строится в линейной оболочке векторов $w_1, \dots, w_m$ путём последовательных замен подходящих пар векторов w_i, w_j их линейными комбинациями $w_i' = aw_i + bw_j$, $w_j' = cw_i + dw_j$ так, чтобы линейная оболочка новых векторов w_i', w_j' оставалась такой же, как у w_i, w_j, но в матрице координат новых векторов становилось больше нулей в левом нижнем углу.

Упражнение 6.3. Убедитесь, что при $ad - bc \neq 0$ линейная оболочка векторов $w_i' = aw_i + bw_j$ и $w_j' = cw_i + dw_j$ остаётся такой же, как у векторов w_i и w_j.

В классическом методе Гаусса принято использовать замены следующих трёх типов:

$$\begin{array}{lll} 1)\ w_i' = w_i + \lambda w_j & w_j' = w_j & (\text{с произвольным } \lambda \in \Bbbk) \\ 2)\ w_i' = w_j & w_j' = w_i & \\ 3)\ w_i' = \varrho w_i & w_j' = w_j & (\text{с ненулевым } \varrho \in \Bbbk)\,. \end{array}$$

При этих заменах исходные векторы линейно выражаются через преобразованные как

$$\begin{array}{ll} 1)\ w_i = w_i' - \lambda w_j' & w_j = w_j' \\ 2)\ w_i = w_j' & w_j = w_i' \\ 3)\ w_i = \varrho^{-1} w_i' & w_j = w_j'\,, \end{array}$$

а матрица координат испытывает следующие *элементарные преобразования строк*

$$\begin{aligned}&1) \text{ к одной из строк прибавляется другая строка, умноженная на число}\\&2) \text{ две строки меняются местами}\\&3) \text{ одна из строк умножается на ненулевое число.}\end{aligned} \tag{6-2}$$

Теорема 6.1 (о преобразовании к приведённому ступенчатому виду)
Каждая матрица $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$ элементарными преобразованиями строк может быть превращена в приведённую ступенчатую матрицу A_{red}. Ненулевые строки матрицы A_{red} образуют базис в линейной оболочке строк матрицы A.

Доказательство. Удобно разбить процесс на последовательные шаги, соответствующие столбцам матрицы A. Будем предполагать, что после выполнения $(k-1)$-го шага та часть матрицы, что находится слева от k-ого столбца, имеет приведённый ступенчатый вид и s ненулевых строк. При $k = 1$ это требование означает, что $s = 0$, и не накладывает никаких ограничений на матрицу. При $k > 1$ ненулевые s строк слева от k-ого столбца суть верхние s строк и $0 \leqslant s \leqslant k-1$. Очередной k-тый шаг вычисления состоит в следующем. Если все элементы k-го столбца, расположенные строго ниже s-й строки, нулевые, то можно переходить к $(k+1)$-му шагу. Если же в k-том столбце имеется ненулевой элемент a, расположенный строго ниже s-той строки, то мы умножаем содержащую его строку на a^{-1}, а затем меняем её местами с $(s+1)$-ой строкой. При этом левые $(k-1)$ столбцов матрицы не изменятся, а $(s+1)$-я строка примет вид

$$\underbrace{0\,0\,\dots\,0\,0}_{k-1}\,1\,\underbrace{*\,*\,\dots\,*\,*}_{n-k}\,.$$

Теперь для каждого $i \neq s+1$ вычтем из i-й строки полученной матрицы $(s+1)$-ую строку, умноженную на элемент, стоящий в пересечении i-й строки и k-го столбца. Это не изменит левые $(k-1)$ столбцов матрицы и обнулит все элементы k-того столбца за исключением стоящей $(s+1)$-ой строке единицы. В результате мы попадаем в исходное положение для $(k+1)$-го шага. Последнее утверждение предложения вытекает из упр. 6.1 и сделанного выше замечания, что элементарные преобразования строк не меняют линейной оболочки строк матрицы. □

Пример 6.1
Построим в координатном пространстве $\mathbb{Q}^5$ базис линейной оболочки строк матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 & 2 & -4\\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}. \tag{6-3}$$

Для этого умножим последнюю строку на -1 и поменяем местами с первой:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 2 & -1\\ 2 & -4 & -8 & 2 & -4\end{pmatrix}.$$

Теперь обнулим первый столбец ниже первой строки, прибавляя надлежащие кратности первой строки ко второй, третьей и четвёртой строкам:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Далее обнулим второй столбец ниже второй строки, добавив подходящие её кратности к нижним двум строкам:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Наконец, делим третью строку на -2 и зануляем последний столбец вне третьей строки, добавляя к первой и четвёртой строкам подходящие кратности третьей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6-4}$$

Верхние три строки этой приведённой ступенчатой матрицы составляют базис в линейной оболочке $U \subset \mathbb{Q}^5$ строк исходной матрицы (6-3). В частности, $\dim U = 3$.

6.2. Отыскание обратной матрицы. Каждое из перечисленных в форм. (6-2) на стр. 72 элементарных преобразований строк $m \times n$ матрицы A можно осуществить, умножая матрицу A слева на квадратную матрицу S, которая получается из единичной матрицы E размера $m \times m$ тем же самым элементарным преобразованием строк, что требуется произвести в матрице A. Преобразование строк, обратное к тому, что осуществляется левым умножением на матрицу S, тоже задаётся левым умножением на некоторую $m \times m$ матрицу T. Применяя обратные друг другу преобразования S и T к единичной $m \times m$ матрице E, мы получаем равенство $TSE = E$, означающее, что $m \times m$ матрицы S и T обратны друг другу. Мы заключаем, что приведённая ступенчатая матрица A_{red}, которая получается из матрицы A элементарными преобразованиями строк, имеет вид $A_{\text{red}} = S_k \dots S_1 A$, где все матрицы $S_1, \dots, S_k \in \mathrm{Mat}_{m \times m}(\Bbbk)$ обратимы.

Для квадратной $m \times m$ матрицы A приведённая ступенчатая матрица A_{red} либо единичная, либо содержит нулевые строки. В первом случае $\operatorname{rk} A = m$ и матрица A обратима по сл. 5.1 на стр. 65, причём из равенства $A_{\text{red}} = E = S_k \dots S_1 A$ вытекает, что $A^{-1} = S_k \dots S_1 = S_k \dots S_1 E$ получается из единичной матрицы E той же самой цепочкой элементарных преобразований строк, что превращает матрицу A в матрицу E. Во втором случае $\operatorname{rk} A < m$ и матрица A необратима по тому же сл. 5.1.

Итак, если приписать справа к квадратной матрице A единичную матрицу E того же размера $m \times m$ и применить к получившейся матрице $\boxed{A \mid E}$ размера $m \times 2m$ метод Гаусса, то либо на выходе получится матрица $\boxed{E \mid B}$, что означает обратимость матрицы A и равенство $A^{-1} = B$, либо в процессе вычислений мы придём к матрице $\boxed{N \mid C}$ с необратимой матрицей N, что означает необратимость матрицы A, ибо будь она обратима, матрица $N = S_k \dots S_1 A$ тоже была бы обратимой.

Пример 6.2
Выясним обратима ли матрица

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Для этого применим метод Гаусса к матрице

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 6 & 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Меняем знак нижней строки, после чего меняем её местами с верхней:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

и обнуляем первый столбец ниже первой строки, отнимая из всех строк надлежащие кратности первой строки:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -14 & 7 & 1 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right).$$

Теперь переставляем вторую и третью строки и обнуляем нижние два элемента второго столбца:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -17 & 7 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \tag{6-5}$$

Чтобы избежать вычислений с дробями, отклонимся от классического метода Гаусса и умножим нижние две строки слева на матрицу[1]

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -17 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 17 & -5 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -7 & 22 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -17 & 53 & 66 \end{array}\right)$$

---

[1] Это равносильно умножению всей матрицы на $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 17 & -5 \end{pmatrix}$

Остаётся вычесть из второй строки третью, а из первой — четвёртую и удвоенную третью:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 9 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 7 & -21 & -26 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -7 & 22 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -17 & 53 & 66 \end{array}\right)$$

Мы заключаем, что матрица A обратима и

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 & 11 \\ -2 & 7 & -21 & -26 \\ 2 & -7 & 22 & 27 \\ 5 & -17 & 53 & 66 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 6.4. Проверьте результат умножением этой матрицы на исходную матрицу A.

6.3. Решение систем линейных уравнений. В n° 5.6 на стр. 66 мы сопоставили системе линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{6-6}$$

матрицу $C = \boxed{A|b}$ размера $m \times (n+1)$, которая получается приписыванием столбца $b = (b_i)$ правых частей системы (6-6) к $m \times n$ матрице $A = (a_{ij})$, составленной из коэффициентов левых частей уравнений (6-6). Перечисленным в форм. (6-2) на стр. 72 элементарным преобразованиям строк матрицы C на языке уравнений отвечают следующие три типа преобразований системы (6-6):

1) почленое сложение одного из уравнений с другим, умноженным на константу
2) перестановка двух уравнений друг с другом (6-7)
3) умножение обеих частей некоторого уравнения на ненулевую константу.

Так как исходная система может быть получена из преобразованной системы аналогичным элементарным преобразованием, обратным к проделанному, исходная и преобразованная система эквивалентны в том смысле, что у них одно и то же пространство решений. Таким образом, метод Гаусса преобразует систему уравнений (6-6) с матрицей $C = \boxed{A|b}$ в эквивалентную ей систему уравнений с приведённой ступенчатой матрицей C_{red}. Пусть базисные столбцы[1] матрицы C_{red} имеют номера $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$. Если $j_r = n+1$, то r-тое уравнение системы имеет вид $0 = 1$, и система несовместна. Если же $j_r \leqslant n$, то систему можно переписать в виде

$$\begin{aligned} x_{j_1} &= \beta_1 - \alpha_{1i_1}x_{i_1} - \alpha_{1i_2}x_{i_2} - \cdots - \alpha_{1i_{n-r}}x_{i_{n-r}} \\ x_{j_2} &= \beta_2 - \alpha_{2i_1}x_{i_1} - \alpha_{2i_2}x_{i_2} - \cdots - \alpha_{2i_{n-r}}x_{i_{n-r}} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{j_r} &= \beta_r - \alpha_{ri_1}x_{i_1} - \alpha_{ri_2}x_{i_2} - \cdots - \alpha_{ri_{n-r}}x_{i_{n-r}}\,, \end{aligned} \tag{6-8}$$

[1] Т. е. столбцы, в которых расположены самые левые ненулевые элементы строк матрицы C_{red}, см. стр. 71.

где $\{i_1, \dots, i_{n-r}\} = \{1, \dots, n\} \smallsetminus \{j_1, \dots, j_r\}$. Переменные $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-r}}$, находящиеся вне базисных столбцов приведённой ступенчатой матрицы, называются *свободными*, так как могут принимать любые значения. Стоящие в базисных столбцах переменные $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ называются *связанными*, поскольку для любого набора значений свободных переменных есть ровно один набор значений связанных переменных, дополняющий указанные значения свободных переменных до решения системы (6-6). Эти единственные значения задаются формулами (6-8), которые, таким образом, доставляют параметрическое описание всех решений системы (6-6).

Это описание согласуется с качественным описанием пространства решений из n° 5.6 на стр. 66. А именно, подставляя в правую часть (6-8) нулевые значения $x_{i_1} = \dots = x_{i_r} = 0$, мы получаем точку $p \in \Bbbk^n$ с координатами $\beta_1, \dots, \beta_r$ на местах с номерами $j_1, \dots, j_r$ и нулевыми остальными координатами. Она удовлетворяет уравнениям (6-6), и каждое решение системы (6-6) имеет вид $p + v$, где вектор v пробегает векторное подпространство $\ker F_A \subset \Bbbk^n$ решений однородной системы $Ax = 0$, которая в развёрнутом виде выглядит как

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0\,, \end{cases} \tag{6-9}$$

и эквивалентна системе $A_{\mathrm{red}}x = 0$, которую тоже можно переписать в виде

$$\begin{aligned} x_{j_1} &= -\alpha_{1i_1}x_{i_1} - \alpha_{1i_2}x_{i_2} - \dots - \alpha_{1i_{n-r}}x_{i_{n-r}} \\ x_{j_2} &= -\alpha_{2i_1}x_{i_1} - \alpha_{2i_2}x_{i_2} - \dots - \alpha_{2i_{n-r}}x_{i_{n-r}} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{j_r} &= -\alpha_{ri_1}x_{i_1} - \alpha_{ri_2}x_{i_2} - \dots - \alpha_{ri_{n-r}}x_{i_{n-r}}\,. \end{aligned} \tag{6-10}$$

Базис в векторном пространстве решений системы (6-10) составляют векторы $u_1, \dots, u_{n-r}$, которые получаются следующим образом. Для каждого $k = 1, \dots, (n-r)$ подставим в правую часть (6-10) значения $x_{i_k} = 1$ и $x_{i_\nu} = 0$ при $\nu \neq k$. Получим вектор с координатами $-\alpha_{1i_k}, \dots, -\alpha_{ri_k}$ на местах с номерами $j_1, \dots, j_r$, координатой 1 на i_k-м месте, и остальными $n-r-1$ координатами равными нулю. Это и есть k-й базисный вектор u_k.

Пример 6.3

Решим методом Гаусса следующую систему уравнений над полем $\mathbb{Q}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 + 3x_6 = 6 \\ -2x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 9x_5 - 5x_6 = -10 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 - x_4 + 13x_5 + 7x_6 = 14 \\ -x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 7x_4 - 8x_5 - 6x_6 = -12 \\ -3x_1 - 6x_2 - 7x_3 - 5x_4 - 16x_5 - 9x_6 - 2x_7 = -17 \end{cases} \tag{6-11}$$

Расширенная матрица этой системы вид

$$\left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 2 & 2 & 1 & 5 & 3 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & -3 & 0 & -9 & -5 & 0 & -10 \\ 3 & 6 & 4 & -1 & 13 & 7 & 0 & 14 \\ -1 & -2 & -5 & -7 & -8 & -6 & 0 & -12 \\ -3 & -6 & -7 & -5 & -16 & -9 & -2 & -17 \end{array}\right).$$

Обнуляем первый столбец вне первой строки, прибавляя ко всем строкам надлежащие кратности первой:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 5 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -2 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -3 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Обнуляем третий столбец вне второй строки, прибавляя ко всем строкам надлежащие кратности второй:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

Удаляем нулевые строки и обнуляем шестой столбец вне нижней строки, прибавляя ко второй и тртьей строкам надлежащие кратности нижней строки:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

Система уравнений, отвечающая этой приведённой ступенчатой матрице может быть записана в виде

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 2x_2 + 3x_4 - 3x_5 - 2x_7 \\ x_3 = -1 - 2x_4 - x_5 - 2x_7 \\ x_6 = 3 + 2x_7\,. \end{cases} \tag{6-12}$$

Придавая свободным переменным x_2, x_4, x_5, x_7 произвольные значения и вычисляя соответствующие значения связанных переменных x_1, x_3, x_6 по формулам (6-12) получаем параметрическое описание всех решений исходной системы (6-11).

На геометрическом языке эти решения заметают в $\mathbb{Q}^7$ аффинное пространство $p + U$, где точка $p = (-1, 0, -1, 0, 0, 3, 0)$ получается подстановкой $x_2 = x_4 = x_5 = x_7 = 0$ в (6-12), а векторное подпространство $U \subset \mathbb{Q}^7$ имеет базис из векторов

$$\begin{aligned} u_1 &= (-2, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\,, & u_2 &= (3, 0, -2, 1, 0, 0, 0)\,, \\ u_3 &= (-3, 0, -1, 0, 1, 0, 0)\,, & u_4 &= (-2, 0, -2, 0, 0, 1, 2)\,, \end{aligned}$$

координаты которых получаются подстановкой в однородные версии формул (6-12)

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 3x_4 - 3x_5 - 2x_7 \\ x_3 = -2x_4 - x_5 - 2x_7 \\ x_6 = 2x_7\,. \end{cases}$$

значений $(x_2, x_4, x_5, x_7) = (1, 0, 0, 0),\ (0, 1, 0, 0),\ (0, 0, 1, 0),\ (0, 0, 0, 1)$.

6.4. Построение базиса в ядре и образе линейного отображения. Пусть линейное отображение $F : U \to W$ имеет матрицу $A = F_{\boldsymbol{wu}} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$ в некоторых базисах $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_m)$ пространств U и W. Тогда образ вектора $v = \boldsymbol{u}x$ со столбцом координат $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ в базисе $\boldsymbol{u}$ равен $F(\boldsymbol{u}x) = F(\boldsymbol{u})x = \boldsymbol{w}F_{\boldsymbol{wu}}x$ и имеет в базисе $\boldsymbol{w}$ столбец координат $F_{\boldsymbol{wu}}x = Ax$. Тем самым ядро $\ker F$ состоит из всех таких векторов $\boldsymbol{u}x$, координатный столбец x которых в базисе $\boldsymbol{u}$ является решением системы однородных уравнений $Ax = 0$. Для описания этих решений матрицу A следует преобразовать к приведённому ступенчатому виду A_{red}, после чего базис в пространстве решений находится описанным выше способом.

Поскольку матрица $A_{\mathrm{red}} = SA$ получается умножением матрицы A слева на некорую обратимую $m \times m$-матрицу S, матрица $A_{\mathrm{red}} = F_{\boldsymbol{eu}}$ является матрицей отображения F в прежнем базисе $\boldsymbol{u}$ пространства U, но в другом базисе $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{w}S^{-1}$ пространства W. В самом деле, матрица перехода[1] $C_{\boldsymbol{ew}} = C_{\boldsymbol{we}}^{-1} = S$ и по форм. (5-14) на стр. 65 $F_{\boldsymbol{eu}} = C_{\boldsymbol{ew}}F_{\boldsymbol{wu}} = SA = A_{\mathrm{red}}$. Тем самым, образ оператора F состоит из векторов $\boldsymbol{e}y$, столбец координат y которых в новом базисе $\boldsymbol{e}$ пространства W лежит в линейной оболочке столбцов матрицы A_{red}. Как мы видели в упр. 6.2 на стр. 71, базисные столбцы матрицы A_{red} образуют базис в линейной оболочке её столбцов. Это означает, что образы $F(u_{j_1}), \dots, F(u_{j_r})$ тех базисных векторов пространства U, номера которых совпадают с номерами базисных столбцов приведённой ступенчатой матрицы A_{red}, составляют базис в $\mathrm{im}\, F$.

Пример 6.4 (вариация прим. 6.1 на стр. 72)
Пусть линейное отображение $F : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^4$ имеет в стандартных базисах матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

из прим. 6.1 на стр. 72. Методом Гаусса мы преобразуем её к приведённому ступенчатому виду

$$A_{\mathrm{red}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и заключаем, что базис в образе оператора F составляют векторы $F(e_1)$, $F(e_2)$, $F(e_5)$, координаты которых в стандартном базисе пространства $\mathbb{Q}^4$ суть первый, второй и пятый столбцы исходной матрицы A. Ядро оператора F составляют векторы, столбец координат x которых в стандартном базисе пространства $\mathbb{Q}^5$ решает систему $A_{\mathrm{red}}x = 0$. Параметрическое представление решений задаётся формулами

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_3 + x_4 \\ x_5 = 0\,. \end{cases}$$

а базис в пространстве решений составляют векторы $(2, -1, 1, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 1, 0)$, координаты которых получаются подстановкой в предыдущие формулы значений $(x_3, x_4) = (1, 0)\,,\ (0, 1)$.

[1] См. n° 5.3 на стр. 62.

6.5. Построение базиса в фактор пространстве. Пусть r-мерное векторное подпространство $U \subset \Bbbk^n$ порождается строками матрицы A и пусть базисные столбцы приведённой ступенчатой матрицы A_{red}, полученной из A элементарными преобразованиями строк, имеют номера $j_1, \dots, j_r$. Покажем, что классы $[e_{i_1}], \dots, [e_{i_{n-r}}]$ стандартных базисных векторов пространства $\Bbbk^n$ с дополнительными к $j_1, \dots, j_r$ номерами $i_1, \dots, i_{n-r}$ образуют базис фактор пространства $\Bbbk^n/U$. Для этого обозначим через E_I и E_J координатные подпространства, натянутые на дополнительные наборы базисных векторов $e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-r}}$ и $e_{j_1}, \dots, e_{j_r}$. Проекция $\pi_J : \Bbbk^n \twoheadrightarrow E_J$ пространства $\Bbbk^n$ на подпространство E_J вдоль подпространства E_I переводит строки приведённой ступенчатой матрицы A_{red} в точности в базисные векторы $e_{j_1}, \dots, e_{j_r}$. Следовательно, ограничение этой проекции на подпространство $U \subset \Bbbk^n$ является изоморфизмом между U и E_J и, в частности, имеет нулевое ядро $U \cap \ker \pi_J = U \cap E_I = 0$. Но тогда и ограничение отображения факторизации $\pi_U : \Bbbk^n \twoheadrightarrow \Bbbk^n/U$ на подпространство $E_I \subset \Bbbk^n$ тоже имеет нулевое ядро, ибо последнее также равно $E_I \cap \ker \pi_U = E_I \cap U$. Поскольку $\dim E_I = n - r = \dim \Bbbk^n / U$, отображение факторизации изоморфно отображает подпространство E_I на фактор $\Bbbk^n / U$. Поэтому образы $[e_i]$ базисных векторов e_i составят базис в $\Bbbk^n / U$.

Пример 6.5 (ещё одна вариация прим. 6.1 на стр. 72)
Пусть подпространство $U \subset \mathbb{Q}^5$ порождено строками матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

из прим. 6.1 на стр. 72. Базисные столбцы приведённой ступенчатой матрицы

$$A_{\text{red}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

имеют номера 1, 2, 5, а базис в факторе $\mathbb{Q}^5/U$ составляют классы $[e_3]_U$ и $[e_4]_U$ базисных векторов e_3, e_4 с дополнительными к 1, 2, 5 номерами.

6.6. Расположение подпространства относительно базиса. В этом разделе мы покажем, что в каждом подпространстве $U \subset \Bbbk^n$ существует единственный базис с приведённой ступенчатой матрицей координат. Отсюда вытекает, в частности, что приведённая ступенчатая матрица A_{red}, полученная из матрицы A элементарными преобразованиями строк, не зависит от выбора цепочки преобразований и даже собственно от матрицы A, а зависит только от линейной оболочки строк матрицы A.

Предложение 6.1
Для каждого векторного подпространства $U \subset \Bbbk^n$ размерности r множество $\{1, \dots, n\}$ можно[1] так разбить в объединение двух непересекающихся дополнительных подмножеств

$$I = \{i_1, \dots, i_{n-r}\} \quad \text{и} \quad J = \{j_1, \dots, j_r\} = \{1, \dots, n\} \smallsetminus I,$$

чтобы линейные оболочки $E_I = \operatorname{span}(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-r}})$ и $E_J = \operatorname{span}(e_{j_1}, \dots, e_{j_r})$ стандартных базисных векторов $e_\nu \in \Bbbk^n$ удовлетворяли следующим эквивалентным условиям:

[1] Как правило, многими способами.

1) подпространства U и E_I имеют нулевое пересечение $U \cap E_I = 0$

2) ограничение на подпространство U проекции $p : V \twoheadrightarrow E_J$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{j_1}, \dots, x_{j_r})$, пространства V на подпространство E_J вдоль подпространства E_I является изоморфизмом между U и E_J

3) ограничение на подпространство E_I отображения факторизации $\pi : V \twoheadrightarrow V/U$, $v \mapsto [v]_U$, является изоморфизмом между E_I и $V\,/\,U$

4) в подпространстве U найдутся r таких векторов $u_1, \dots, u_r$, что $u_\nu - e_{j_\nu} \in E_I$ при всех $1 \leqslant \nu \leqslant r$.

При выполнении этих условий векторы $u_1, \dots, u_r$ из условия (4) автоматически образуют базис подпространства U и однозначно определяются подпространством U и выбором разложения $\{1, \dots, n\} = I \sqcup J$ обладающего свойствами (1) – (4).

Доказательство. Пусть векторы $v_1, \dots, v_r \in U$ образуют базис подпространства U. По лемме о замене[1] некоторые r векторов $e_{j_1}, \dots, e_{j_r}$ стандартного базиса в $\Bbbk^n$ можно заменить векторами v_j так, чтобы полученный в результате набор $v_1, \dots, v_r, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-r}}$ остался базисом в $\Bbbk^n$. В таком случае линейная оболочка $E_I = \operatorname{span}(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-r}})$ оставшихся базисных векторов обладает свойством (1) и, тем самым, существует. Покажем теперь, что условия (1) – (4) эквивалентны друг другу. В n° 6.5 выше мы видели, что ядро ограничения отображения p на подпространство U и ядро ограничения отображения π на подпространство E_I оба равны $U \cap E_I$. Из условия (1) вытекает, что $\ker p|_U = \ker \pi|_{E_I} = U \cap E_I = 0$. Поэтому оба ограничения $p|_U : U \to E_J$ и $\pi|_{E_I} : E_I \to V\,/\,U$ инъективны. Так как $\dim U = r = \dim E_J$ и $\dim E_I = n - r = \dim V\,/\,U$, оба ограничения — изоморфизмы. Таким образом, (1) влечёт (2) и (3). Наоборот, каждое из условий (2), (3) влечёт равенство $0 = \ker p|_U = \ker \pi|_{E_I} = U \cap E_I$, т. е. условие (1). Условие (4) утверждает, что r векторов $u_1, \dots, u_r$ из r-мерного подпространства U переводятся проекцией p в стандартные базисные векторы r-мерного координатного подпространства E_J, что равносильно условию (2). Наконец, если условия (1)-(4) выполняются, то ограничение $p|_U : U \to E_J$ является изоморфизмом, и в U есть единственный базис $u_1, \dots, u_r$, переводимый эти изоморфизмом в стандартный базис $e_{j_1}, \dots, e_{j_r}$ пространства E_J. □

Замечание 6.1. Векторное подпространство $U \subset \Bbbk^n$ размерности r может иметь нулевое пересечение сразу с несколькими и даже со всеми[2] $(n - r)$-мерными координатными подпространствами E_I. На координатном языке условие (4) в предл. 6.1 означает, что матрица координат векторов $u_1, \dots, u_r$ содержит в столбцах с номерами $j_1, \dots, j_r$ единичную подматрицу размера $r \times r$. Ниже мы увидим, что метод Гаусса строит в подпространстве U удовлетворяющий этому условию базис с лексикографически минимальным[3] возможным набором номеров $j_1, \dots, j_r$.

---

[1] См. лем. 4.2 на стр. 48.

[2] Над бесконечным полем $\Bbbk$ «случайное» r-мерное подпространство $U \subset V$ почти наверняка будет именно таким.

[3] Напомню, что *лексикографический порядок* на множестве r-буквенных слов $x_1 \dots x_r$, составленных из букв некоего упорядоченного алфавита X, представляет собою стандартное упорядочение всех этих слов по алфавиту, при котором слово w_1 меньше слова w_2 если первая слева различающаяся буква этих слов в слове w_1 меньше, чем в слове w_2.

6.6.1. Комбинаторный тип подпространства. Лексикографически минимальный набор индексов $j_1, \dots, j_r$, для которого выполняются условия предл. 6.1, называется *комбинаторным типом* подпространства $U \subset \Bbbk^n$. Комбинаторный тип имеет следующее альтернативное описание. Для каждого $k = 0, 1, \dots, n$ обозначим через $V_{>k}$ линейную оболочку стандартных базисных векторов $e_{k+1}, \dots, e_n$. Получаем убывающую цепочку вложенных подпространств:

$$V = V_{>0} \supset V_{>1} \supset \cdots \supset V_{>(n-1)} \supset V_{>n} = 0\,.$$

Положим $W_{\leqslant k} = V \,/\, V_{>k}$ и обозначим через $\pi_k : \Bbbk^n \twoheadrightarrow W_{\leqslant k}$, $v \mapsto [v]$, отображение факторизации. Базис пространства $W_{\leqslant k}$ составляют классы $[e_1], \dots, [e_k]$ первых k стандартных базисных векторов по модулю последних $n-k$ базисных векторов, и проекция π_k переводит вектор $(x_1, \dots, x_n) \in \Bbbk^n$ в вектор с координатами $(x_1, \dots, x_k)$ в базисе $[e_1], \dots, [e_k]$, т. е. попросту стирает последние $n-k$ координат. При $k = 0$ мы имеем нулевое отображение $\pi_0 : \Bbbk^n \to 0$, а при $k = n$ — тождественное отображение $\pi_n = \mathrm{Id}_{\Bbbk^n} : \Bbbk^n \xrightarrow{\sim} \Bbbk^n$. При $k \geqslant 1$ фактор $W_{\geqslant k} / \Bbbk\,[e_k]$ пространства $W_{\geqslant k}$ по одномерному подпространству, порождённому базисным классом $[e_k]$, равен $W_{\leqslant (k-1)}$, и проекция $\pi_{k-1} : \Bbbk^n \twoheadrightarrow W_{\leqslant (k-1)}$ является композицией проекции $\pi_k : \Bbbk^n \twoheadrightarrow W_{\leqslant k}$ с последующей проекцией $W_{\leqslant k} \twoheadrightarrow W_{\leqslant (k-1)}$, ядро которой одномерно. Поэтому для каждого r-мерного подпространства $U \subset \Bbbk^n$ размерности $d_k = \dim \pi_k(U)$ образуют нестрого возрастающую последовательность $d_0, d_1, \dots, d_n$ с $d_0 = 0$, $d_n = r$ и приращениями $d_k - d_{k-1} \leqslant 1$. Последнее вытекает из того, что подпространство $\pi_{k-1}(U)$ является образом подпространства $\pi_k(U)$ при линейном отображении $W_{\geqslant k} \twoheadrightarrow W_{\geqslant (k-1)}$ с одномерным ядром, пересечение которого с $\pi_k(U)$ либо нулевое, либо одномерное.

Предложение 6.2
Для данного подпространства $U \subset \Bbbk^n$ размерности r следующие три набора из r возрастающих натуральных чисел совпадают друг с другом:

1) набор $k_1, \dots, k_r$ тех значений $k \geqslant 1$, для которых $d_k > d_{k-1}$ в последовательности размерностей $d_k = \dim \pi_k(U)$.

2) набор номеров $j_1, \dots, j_r$ базисных столбцов приведённой ступенчатой матрицы, полученной методом Гаусса из матрицы координат[1] любого конечного набора векторов, порождающего подпространство U

3) лексикографически наименьший набор индексов $j_1^{\min}, \dots, j_r^{\min}$, удовлетворяющий условиям предл. 6.1 на стр. 79, означающим, что в U есть базис, матрица координат которого имеет единичную $r \times r$ подматрицу в столбцах с номерами $j_1^{\min}, \dots, j_r^{\min}$

Доказательство. Ненулевые строки $u_1, \dots, u_r$ приведённой ступенчатой матрицы из (2) составляют в пространстве U базис, удовлетворяющий условиям предл. 6.1 для $J = \{j_1, \dots, j_r\}$. Так как проекции $\pi_k(u_\nu)$ векторов u_ν с $j_\nu \leqslant k$ линейно независимы в силу ступенчатости матрицы их координат, а векторы u_μ с $j_\mu > k$ лежат в $\ker \pi_k$, первые векторы составляют базис в $\pi_k(U)$, а последние — базис в $\ker \pi_k\big|_U = U \cap V_{>k}$. Поэтому $j_1, \dots, j_r$ суть в точности те номера k, для которых $d_k > d_{k-1}$. Это доказывает совпадение последовательностей (1) и (2). Докажем теперь совпадение последовательностей (2) и (3). Пусть матрица координат базисных векторов $w_1, \dots, w_r$ пространства U содержит единичную подматрицу в столбцах с номерами $j_1^{\min}, \dots, j_r^{\min}$. Так как

[1] Напомню, что всюду в этом параграфе мы пишем координаты по строкам.

проекции $\pi_k(w_\nu)$ векторов w_ν с $j_\nu^{\min} \leqslant k$ линейно независимы, количество таких векторов при каждом k не превышает размерности $\dim \pi_k(U)$, которая по уже доказанному равна количеству векторов u_ν с $j_\nu \leqslant k$. Иными словами, при каждом $k = 1, \dots, n$ количество чисел $j_\nu^{\min}$, не превышающих k, не больше количества чисел j_ν, не превышающих k. Тем самым, набор $j_1^{\min}, \dots, j_r^{\min}$ не может быть лексикографически меньше набора $j_1, \dots, j_r$. □

Следствие 6.1

В каждом подпространстве $U \subset \Bbbk^n$ существует единственный базис с приведённой ступенчатой матрицей координат M_U, и сопоставление подпространству U этой матрицы M_U устанавливает биекцию между приведёнными ступенчатыми матрицами, имеющими r ненулевых строк, и r-мерными подпространствами в $\Bbbk^n$. □

Упражнение 6.5. Убедитесь, что приведённые ступенчатые матрицы из r ненулевых строк с номерами базисных столбцов $j_1, \dots, j_r$ образуют в пространстве $\mathrm{Mat}_{r\times n}(\Bbbk)$ аффинное подпространство размерности $r(n-r) - \sum_{\nu=1}^{r}(j_\nu - \nu + 1)$ и докажите тождество

$$\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-r+1}-1)}{(q^r-1)(q^{r-1}-1)\cdots(q-1)} = \sum_{\lambda\subseteq\Pi} q^{|\Pi\smallsetminus\lambda|}\,,$$

где суммирование происходит по всем различным диаграммам Юнга[1] λ, умещающимся в прямоугольник Π размера $r \times (n-r)$, а показатель $|\Pi \smallsetminus \lambda|$ равен количеству клеток в дополнении диаграммы до прямоугольника (пустая диаграмма $\lambda = \varnothing$ и весь прямоугольник $\lambda = \Pi$ при этом тоже учитываются).

[1] См. пример 1.3 на стр. 7 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-01.pdf.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 6.1. Если матрица координат векторов $u_1, \dots, u_r$ содержит единичную $r \times r$ матрицу в столбцах с номерами $j_1, \dots, j_r$, то при j_i-я координата вектора $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_r u_r$ равна λ_i каждом $i = 1, \dots, r$. Поэтому такой вектор зануляется только когда все $\lambda_i = 0$.

Упр. 6.2. Пусть базисными являются столбцы с номерами $j_1, \dots, j_r$. Тогда в любом другом столбце могут быть отличны от нуля только числа, стоящие в первых r строках. Если они равны $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, то сам столбец является линейной комбинацией $\alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_r c_r$ базисных столбцов $c_1, \dots, c_r$.

Упр. 6.3. Согласно форм. (5-13) на стр. 64 при $ad - bc \neq 0$ матрица

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = (ad - bc)^{-1} \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

обратна к матрице $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Поэтому векторы w_i, w_j линейно выражаются через преобразованные строки $w_i' = aw_i + bw_j$, $w_j' = cw_i + dw_j$ по формулам $w_i = a'w_i' + b'w_j'$, $w_j = c'w_i' + d'w_j'$.

Упр. 6.5. Если отнять из произвольной такой матрицы матрицу E_J, имеющую единичную $r \times r$ подматрицу в столбцах с номерами $j_1, \dots, j_r$ и нули в остальных местах, то получится матрица, у которой равны нулю все элементы в столбцах с номерами $j_1, \dots, j_r$, а также, при каждом $i = 1, \dots, r$, все элементы i-й строки в клетках с 1-й по j_i-ю включительно. Ну а остальные $r^2 + \sum_{\nu=1}^{r} (i_\nu - \nu + 1)$ элементов могут принимать любые значения. Тождество выражает собою равенство количества r-мерных векторных подпространств в n-мерном координатном пространстве над полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов количеству приведённых ступенчатых матриц с r ненулевыми строками в $\mathrm{Mat}_{r \times n}(\mathbb{F}_q)$.