§1. Аффинная плоскость

1.1. Векторные пространства. Фиксируем произвольное поле[1] $\Bbbk$, элементы которого будем называть *числами* или *скалярами*. Множество V, элементы которого мы будем называть *векторами*[2], является *векторным пространством* над полем $\Bbbk$, если на V определены операция *сложения векторов*, сопоставляющая каждой паре векторов $v_1, v_2 \in V$ их сумму $v_1 + v_2 \in V$, и операция *умножения векторов на числа*, сопоставляющая каждым вектору $v \in V$ и скаляру $\lambda \in \Bbbk$ вектор $\lambda \cdot v = v \cdot \lambda \in V$ так, что выполняются следующие аксиомы.

1. Свойства сложения векторов:

   (1а) $a + b = b + a$ для всех $a, b \in V$ (см. рис. 1◇1)

   (1б) $a + (b + c) = (a + b) + c$ для всех $a, b, c \in V$ (см. рис. 1◇2)

   (1в) имеется такой *нулевой вектор* $0 \in V$, что $a + 0 = a$ для всех $a \in V$

   (1г) для каждого вектора $a \in V$ имеется такой *противоположный вектор* $-a \in V$, что $a + (-a) = 0$.

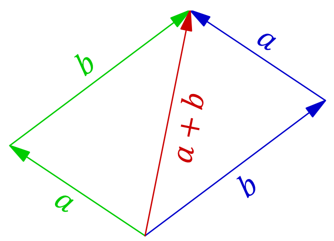

Рис. 1◇1. Правило параллелограмма.

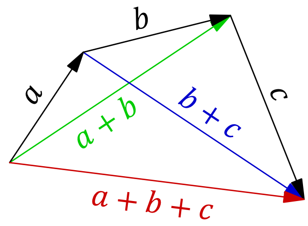

Рис. 1◇2.Правило четырёхугольника.

2. Свойства умножения векторов на числа:

   (2а) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$ для всех $a \in V$ и $\lambda, \mu \in \Bbbk$

   (2б) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ для всех $a \in V$ и $\lambda, \mu \in \Bbbk$

   (2в) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ для всех $a, b \in V$ и $\lambda \in \Bbbk$

   (2г) $1 \cdot a = a$ для всех $a \in V$.

Подмножество U векторного пространства V называется *векторным подпространством*, если для любых двух векторов $u, w \in U$ все их линейные комбинации $\lambda u + \mu w$ с произвольными $\lambda, \mu \in \Bbbk$ тоже лежат в U. Из написанных аксиом формально вытекает ещё несколько интуитивно ожидаемых свойств операций над векторами.

---

[1] Точное определение поля будет дано в курсе алгебры
(см., например, лекцию http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-02.pdf).

[2] Векторы продуктивно представлять себе как направленные отрезки, рассматриваемые с точностью до параллельного переноса.

Лемма 1.1

В каждом векторном пространстве V нулевой вектор $0 \in V$ единствен. Для любого $a \in V$ противоположный к a вектор $-a$ однозначно определяется по a. Кроме того, $0 \cdot a = 0$ и $(-1) \cdot a = -a$, где 0 и -1 в левых частях равенств суть числа из поля $\Bbbk$, а 0 и $-a$ в правых — векторы из пространства V. Аналогично, $\lambda \cdot 0 = 0$ для всех $\lambda \in \Bbbk$, где $0 \in V$ — нулевой вектор.

Доказательство. Для любых двух нулевых векторов $0_1, 0_2 \in V$ по аксиоме (1в) выполняется равенство $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$. Если векторы b и c оба противоположны к a, то $b = b + 0 = b + (a + c) = (b + a) + c = 0 + c = c$. Если к левой и правой частям равенства

$$a + 0 \cdot a = 1 \cdot a + 0 \cdot a = (1 + 0) \cdot a = 1 \cdot a = a$$

прибавить противоположный к a вектор $-a$, мы получим $0 \cdot a = 0$. Аналогично, прибавляя к обеим частям равенства $\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (0 + 0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0$ вектор, противоположный вектору $\lambda \cdot 0$, получаем $0 = \lambda \cdot 0$. Вектор $(-1) \cdot a$ противоположен к a, поскольку $a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 - 1) \cdot a = 0 \cdot a = 0$. $\square$

Пример 1.1

Простейшие примеры векторных пространств суть *нулевое* или *тривиальное пространство* 0, состоящее из одного лишь нулевого вектора 0, такого что $0 + 0 = 0 = -0$ и $\lambda \cdot 0 = 0$ для всех $\lambda \in \Bbbk$, а также само поле $\Bbbk$, где сложение векторов и их умножение на числа суть сложение и умножение, которые имеются в поле $\Bbbk$.

Пример 1.2 (n-мерное координатное пространство $\Bbbk^n$)

По определению, векторами пространства $\Bbbk^n$ являются упорядоченные наборы из n чисел[1]

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)\,, \quad x_i \in \Bbbk\,.$$

Сложение векторов и их умножение на числа задаются правилами

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \dots\ ,\ x_n + y_n)$$
$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)\,.$$

Пример 1.3 (пространство многочленов)

Многочлены с коэффициентами в поле $\Bbbk$ образуют векторное пространство над $\Bbbk$ относительно операций сложения многочленов и умножения их на константы. Это пространство обозначается $\Bbbk[x]$. Многочлены степени не выше n образуют в $\Bbbk[x]$ векторное подпространство, которое мы будем обозначать $\Bbbk[x]_{\leqslant n}$.

1.1.1. Линейные отображения. Отображение $F : U \to W$ из векторного пространства U в векторное пространство W называется *линейным*, если оно перестановочно со сложением векторов и их умножением на числа в том смысле, что $F(\alpha a + \beta b) = \alpha F(a) + \beta F(b)$ для всех $a, b \in U$ и $\alpha, \beta \in \Bbbk$. Векторные пространства, между которыми имеется взаимно однозначное линейное отображение, называются *изоморфными*, а само это отображение называется *изоморфизмом* векторных пространств. Изоморфизмы $V \xrightarrow{\sim} V$ пространства с самим собою называются *автоморфизмами*. Автоморфизмы векторного пространства V образуют *группу преобразований*[2]. Эта группа обозначается $\mathrm{GL}(V)$ и называется *полной линейной группой* векторного пространства V.

[1] Для экономии бумаги мы пишем их в строчку, но иногда бывает удобно представлять векторы пространства $\Bbbk^n$ и в виде столбцов.

[2] См. стр. 4.

Пример 1.4
Пространство $\Bbbk[x]_{\leqslant n}$ многочленов степени не выше n изоморфно $(n+1)$-мерному координатному пространству $\Bbbk^{n+1}$ посредством линейного биективного отображения, сопоставляющего многочлену $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ набор его коэффициентов $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \Bbbk^{n+1}$.

Предостережение 1.1. Обратите внимание, что отображение $\varphi : \Bbbk \to \Bbbk$, заданное формулой $\varphi(x) = a \cdot x + b$, которое в школе принято называть «линейной функцией», линейно в смысле n° 1.1.1 *только* при $b = 0$. Если же $b \neq 0$, то $\varphi(\lambda x) \neq \lambda\varphi(x)$ и $\varphi(x+y) \neq \varphi(x) + \varphi(y)$, т. е. φ *не* является линейным отображением.

Упражнение 1.1. Докажите, что для любого линейного отображения F выполняются равенства

$$F(0) = 0 \quad \text{и} \quad F(-v) = -F(v) \text{ для всех } v \in V.$$

1.1.2. Пропорциональные векторы и одномерные пространства. Векторы a и b из векторного пространства V называются *пропорциональными*, если $x \cdot a = y \cdot b$ для некоторых чисел $x, y \in \Bbbk$, не равных одновременно нулю. Таким образом, нулевой вектор пропорционален любому вектору, а пропорциональность ненулевых векторов a и b означает, что $a = \lambda b$ и $b = \lambda^{-1}a$ для некоторого ненулевого $\lambda \in \Bbbk$.

Векторное пространство V называется *одномерным*, что принято записывать равенством[1] $\dim V = 1$, если в нём есть ненулевые векторы, но все они пропорциональны друг другу. Фиксируя в одномерном пространстве V какой-нибудь ненулевой вектор e, мы можем однозначно записать любой вектор $v \in V$ как $v = xe$ с $x \in \Bbbk$. Такое представление единственно, поскольку из равенства $xe = ye$ вытекает, что $(x-y)e = 0$, откуда $x - y = 0$, ибо в противном случае, умножая обе части равенства $(x-y)e = 0$ на число $(x-y)^{-1}$, мы получили бы $e = 0$.

Число x называется *координатой* вектора $v = xe$ относительно *базисного* вектора e. Отображение $V \to \Bbbk$, переводящее каждый вектор $v = xe \in V$ в его координату $x \in \Bbbk$ устанавливает изоморфизм между V и $\Bbbk$. При выборе другого базисного вектора $e' = \lambda e$ координата x' каждого вектора $v = x'e' = x'\lambda e = xe$ относительно этого нового базисного вектора связана со старой координатой x соотношением $x' = \lambda^{-1}x$.

Каждое линейное отображение $F : V \xrightarrow{\sim} V$ одномерного пространства V в себя однозначно задаётся тем, куда оно переводит какой-нибудь базисный вектор e пространства V. Если $F(e) = \lambda e$, то для произвольного вектора $v = xe$ получим $F(xe) = xF(e) = \lambda xe$. В частности, отображение F либо переводит все векторы в нуль, либо является *гомотетией*[2] с ненулевым коэффициентом $\lambda \in \Bbbk$. Таким образом, полная линейная группа $\mathrm{GL}(V)$ одномерного пространства V состоит из гомотетий с ненулевыми коэффициентами и изоморфна мультипликативной группе $\Bbbk^*$ ненулевых элементов поля $\Bbbk$.

1.2. Двумерное векторное пространство. Векторное пространство V называется *двумерным*, что принято записывать равенством $\dim V = 2$, если в нём есть пара непропорциональных векторов e_1, e_2, и каждый вектор $v \in V$ выражается через них в виде $v = x_1e_1 + x_2e_2$, где $x_1, x_2 \in \Bbbk$. Любая пара векторов e_1, e_2, обладающая этими двумя свойствами, называется *базисом* пространства V. Коэффициенты x_1, x_2 разложения вектора v по базису *однозначно* определяются

[1] Обозначение $\dim$ является сокращением от *dimension* (размерность). В полной общности мы обсудим это понятие чуть позже.

[2] Или *растяжением* в λ раз, т. е. действует на любой вектор $v \in V$ по правилу $v \mapsto \lambda v$.

вектором v и базисом, поскольку из равенства $x_1e_1 + x_2e_2 = y_1e_1 + y_2e_2$ вытекает равенство $(x_1 - y_1)\,e_1 = (x_2 - y_2)\,e_2$, возможное только при $(x_1 - y_1) = (x_2 - y_2) = 0$ в силу того, что векторы e_1 и e_2 не пропорциональны. Числа $x_1, x_2 \in \Bbbk$ из разложения $v = x_1e_1 + x_2e_2$ называются *координатами* вектора v в базисе $e = (e_1, e_2)$. Сопоставляя каждому вектору столбец его координат в базисе e, мы получаем биективное отображение

$$c_e : V \xrightarrow{\sim} \Bbbk^2\,, \quad v = x_1e_1 + x_2e_2 \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \Bbbk^2\,.$$

Упражнение 1.2. Проверьте, что это отображение линейно, т. е. при сложении векторов столбцы их координат складываются, а при умножении на число — умножаются на число по правилам координатного пространства $\Bbbk^2$.

Таким образом, всякое двумерное векторное пространство V изоморфно координатному пространству $\Bbbk^2$.

1.2.1. Определитель 2×2. Пропорциональность векторов $a = (a_1, a_2)$ и $b = (b_1, b_2)$ в $\Bbbk^2$ равносильна равенству перекрёстных произведений $a_1b_2 = a_2b_1$. Число

$$\det(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} a_1b_2 - a_2b_1 \tag{1-1}$$

называется *определителем* векторов $a, b \in \Bbbk^2$ или 2×2-матрицы, составленной из координат этих векторов. В последнем случае определитель записывают как

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

Обратите внимание, что неважно, каким образом записаны координаты векторов — по строкам или по столбцам матрицы, поскольку величина (1-1) не меняется при отражении матрицы относительно диагонали, ведущей из левого верхнего угла в правый нижний[1]. Очевидно, что для всех векторов $a, b, c \in \Bbbk^2$ и чисел $\lambda \in \Bbbk$ выполняются равенства

$$\det(a, b) = 0 \iff a \text{ и } b \text{ пропорциональны} \tag{1-2}$$

$$\det(a, b) = -\det(b, a) \tag{1-3}$$

$$\det(\lambda a, b) = \lambda \det(a, b) = \det(a, \lambda b) \tag{1-4}$$

$$\begin{aligned} \det(a + b, c) &= \det(a, c) + \det(b, c) \\ \det(a, b + c) &= \det(a, b) + \det(a, c) \end{aligned} \tag{1-5}$$

Упражнение 1.3. Убедитесь в этом!

Свойство (1-3) называется *знакопеременностью*, (1-4) — *однородностью*, (1-5) — *аддитивностью*. Вместе однородность и аддитивность означают, что определитель *линеен* по каждому из двух своих аргументов, т. е. *билинеен*. Из билинейности вытекает, что для любых векторов $a, b, c, d \in \Bbbk^2$ и констант $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Bbbk$ выполняется то же самое правило раскрытия скобок[2], что и для произведения чисел:

$$\det(\alpha a + \beta b\,,\, \gamma c + \delta d) = \alpha\gamma \det(a, c) + \alpha\delta \det(a, d) + \beta\gamma \det(b, c) + \beta\delta \det(b, d)\,.$$

[1] Эта диагональ называется *главной*, а отражение матрицы относительно главной диагонали называется *транспонированием*.

[2] Это правило называют *дистрибутивностью* или *распределительным законом*.

Лемма 1.2

Каждая пара непропорциональных векторов $a, b \in \Bbbk^2$ является базисом. Коэффициенты разложения произвольного вектора $v \in \Bbbk^2$ по этому базису вычисляются по *правилу Крамера*:

$$v = x \cdot a + y \cdot b \iff \begin{cases} x = \det(v, b)/\det(a, b) \\ y = \det(a, v)/\det(a, b)\,. \end{cases} \tag{1-6}$$

Доказательство. Если имеется разложение $v = x \cdot a + y \cdot b$, то из билинейности и кососимметричности определителя вытекают равенства

$$\det(a, v) = \det(a, x \cdot a + y \cdot b) = x \cdot \det(a, a) + y \cdot \det(a, b) = y \cdot \det(a, b)$$
$$\det(v, b) = \det(x \cdot a + y \cdot b, b) = x \cdot \det(a, b) + y \cdot \det(b, b) = x \cdot \det(a, b)\,,$$

из которых x и y однозначно выражаются в виде (1-6). Для доказательства существования разложения $v = x \cdot a + y \cdot b$ заметим, что разность $v - a \cdot \det(v, b)/\det(a, b)$ пропорциональна вектору b, т. к. $\det\bigl(v - a \cdot \det(v, b)/\det(a, b)\,,\ b\bigr) = \det(v, b) - \det(a, b) \cdot \det(v, b)/\det(a, b) = 0$. Поэтому $v = a \cdot \det(v, b)/\det(a, b) + b \cdot y$ для некоторого $y \in \Bbbk$. □

Следствие 1.1

В любом двумерном векторном пространстве любые два непропорциональных вектора образуют его базис. □

Упражнение 1.4. Пусть вектор v имеет в базисе (u_1, u_2) координаты $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, а векторы u_1, u_2, в свою очередь, имеют в неком другом базисе (w_1, w_2) координаты $u_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$ и $u_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}$. Найдите координаты вектора v в базисе (w_1, w_2).

1.3. Площадь ориентированного параллелограмма. Функция $s : V \times V \to \Bbbk$, сопоставляющая каждой упорядоченной паре векторов a, b двумерного векторного пространства V число $s(a, b) \in \Bbbk$, называется *площадью ориентированного параллелограмма*, если для любых векторов $a, b \in V$ и чисел $\lambda, \mu \in \Bbbk$ выполняются равенства

$$s(a, b + \lambda a) = s(a, b) = s(a + \mu b, b) \tag{1-7}$$
$$s(\lambda a, b) = \lambda s(a, b) = s(a, \lambda b)\,. \tag{1-8}$$

Первое из них означает, что площадь параллелограмма не меняется при параллельном переносе одной из его сторон вдоль самой себя: треугольник, который при этом отрезается, параллельно сдвигается и приклеивается с другой стороны, как на рис. 1◇3.

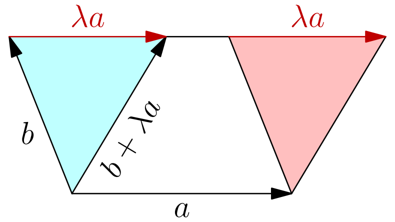

Рис. 1◇3. Площадь не меняется.

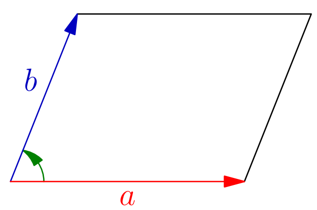

Рис. 1◇4. Ориентированный параллелограмм.

Второе свойство (1-8) утверждает, что при изменении одной из сторон параллелограмма в λ раз площадь также изменяется в λ раз. В частности, $s(-a,b) = -s(a,b) = s(a,-b)$, т. е. площадь *меняет знак* при смене знака одного из векторов. В школьном курсе геометрии над полем $\Bbbk = \mathbb{R}$ принято считать, что площадь положительна и $s(\lambda a,b) = s(a,\lambda b) = |\lambda| \cdot s(a,b)$. Отказываясь от положительности, мы не просто упраздняем модуль[1], но помимо абсолютной величины площади учитываем также и *ориентацию* параллелограмма. На вещественной координатной плоскости $\mathbb{R}^2$ упорядоченные пары векторов (a,b) геометрически отличаются друг от друга тем, в какую сторону происходит кратчайший поворот, совмещающий направление первого вектора с направлением второго. Те пары векторов, для которых такой поворот происходит против часовой стрелки, называются *положительно* ориентированными, а те, для которых по часовой стрелке — *отрицательно* ориентированными. Равенство $s(-a,b) = -s(a,b)$ означает, что площадь меняет знак при смене ориентации параллелограмма на противоположную, как на рис. 1◇5.

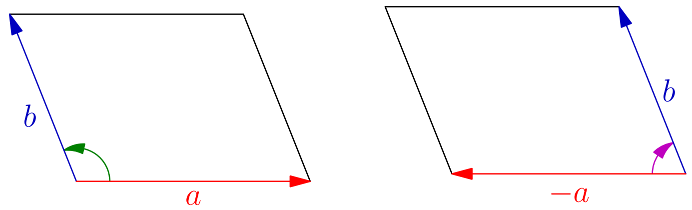

Рис. 1◇5. Смена ориентации при смене знака.

Лемма 1.3

Каждая функция площади $s : V \times V \to \Bbbk$ обращается в нуль на парах пропорциональных векторов[2], знакопеременна: $s(a,b) = -s(b,a)$ и аддитивна:

$$s(a,b+c) = s(a,b) + s(a,c) \qquad \forall\ a,b,c \in \Bbbk^2\,. \tag{1-9}$$

Доказательство. Первые два свойства вытекают прямо из (1-7) и (1-8):

$$s(\lambda v, v) = s(0+\lambda v, v) = s(0,v) = s(0\cdot 0, v) = 0 \cdot s(0,v) = 0\,,$$
$$s(a,b) = s(a,a+b) = s(a-(a+b),a+b) = s(-b,a+b) = -s(b,a+b) = -s(b,a)\,.$$

Докажем аддитивность. Если вектор a пропорционален и вектору b, и вектору c, то он пропорционален и их сумме $b+c$. В этом случае все три площади в (1-9) зануляются. Если вектор a не пропорционален, скажем, вектору b, то a и b составляют базис, и $c = \alpha a + \beta b$ для некоторых $\alpha, \beta \in \Bbbk$. В этом случае левая и правая части (1-9) тоже равны друг другу:

$$s(a,b+c) = s(a,b+\alpha a+\beta b) = s(a,(1+\beta)b) = (1+\beta)s(a,b)\,,$$
$$s(a,b)+s(a,c) = s(a,b)+s(a,\alpha a+\beta b) = s(a,b)+s(a,\beta b) =$$
$$= s(a,b)+\beta s(a,b) = (1+\beta)s(a,b)\,.$$

□

[1] Что значительно упрощает вычисления и делает их осмысленными над любым полем $\Bbbk$.

[2] В частности, когда один из векторов нулевой или когда два вектора совпадают друг с другом. Свойство $s(a,a) = 0$ называют *кососимметричностью*, см. упр. 1.5 ниже.

Упражнение 1.5 (кососимметричность и знакопеременность). Функция от двух аргументов $f : V \times V \to \Bbbk$ называется *кососимметричной*, если $f(v, v) = 0$ для всех $v \in V$. Убедитесь, что всякая билинейная кососимметричная функция знакопеременна, а если в поле $\Bbbk$ выполнено неравенство $1 \neq -1$, то и наоборот, все знакопеременные функции кососимметричны.

Теорема 1.1
На координатном векторном пространстве $\Bbbk^2$ имеется единственная с точностью до пропорциональности ненулевая функция площади. Она имеет вид $s(a, b) = c \cdot \det(a, b)$, где константа $c = s(e_1, e_2)$ равна площади стандартного базисного параллелограмма на векторах

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. В силу аддитивности, однородности и знакопеременности функции $s(a, b)$ для любой пары векторов $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ и $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ выполняются равенства

$$s(a, b) = s(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) s(e_1, e_2) = \det(a, b) \cdot s(e_1, e_2). \tag{1-10}$$

Поэтому все функции площади пропорциональны определителю. С другой стороны, из свойств определителя (1-2) – (1-5) вытекает, что при любом $\lambda \in \Bbbk$ функция $s(a, b) = \lambda \cdot \det(a, b)$ удовлетворяет соотношениям (1-7), (1-8) и при $\lambda \neq 0$ является ненулевой. □

Следствие 1.2
На любом двумерном векторном пространстве V имеется единственная с точностью до пропорциональности ненулевая функция площади. Если векторы $e = (e_1, e_2)$ образуют в V базис, а векторы $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ и $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ произвольны, то[1]

$$s(a, b)/s(e_1, e_2) = \det_e(a, b) = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$$

для любой ненулевой функции площади s на пространстве V. □

Следствие 1.3
Координаты вектора $v = ax + by$ в любом базисе (a, b) двумерного векторного пространства V равны отношениям площадей $x = s(v, b)/s(a, b)$, $y = s(a, v)/s(a, b)$. □

1.4. Аффинные[2] пространства. Множество $\mathbb{A}$ называется *аффинным пространством* над векторным пространством V, если каждой упорядоченной паре точек $a, b \in \mathbb{A}$ сопоставлен вектор $\overrightarrow{ab} \in V$ так, что для любой точки $p \in \mathbb{A}$ отображение *векторизации с центром в p*

$$v_p : \mathbb{A} \to V, \quad q \mapsto \overrightarrow{pq},$$

взаимно однозначно, и для любых трёх (не обязательно различных) точек $a, b, c \in \mathbb{A}$ выполняется *правило треугольника* $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$.

[1] Здесь и далее мы обозначаем через $\det_e(a, b)$ определитель матрицы, образованной столбцами координат векторов a, b в базисе e.

[1] Термин *аффинный* не должен вызывать «греческих» реминисценций — это банальная калька с английского *affine* (ассоциированный).

Иначе можно сказать, что с каждым вектором $v \in V$ связано биективное *преобразование сдвига*[1] *на вектор* v

$$\tau_v : \mathbb{A} \to \mathbb{A}, \quad p \mapsto p + v,$$

со следующими двумя свойствами: для каждой пары точек $p, q \in \mathbb{A}$ имеется единственный такой вектор $v \in V$, что $p + v = q$, и для любых векторов $u, w \in V$ выполняется равенство

$$\tau_u \circ \tau_v = \tau_{u+w}.$$

Второе описание эквивалентно первому: вектор $v \in V$ со свойством $p + v = q$, о котором идёт речь во втором определении, это вектор $\overrightarrow{pq}$ из первого определения, а правило треугольника из первого определения означает равенство $\tau_u \circ \tau_v = \tau_{u+w}$ во втором.

Упражнение 1.6. Убедитесь в этом и выведите из определений, что: а) $\overrightarrow{aa} = 0$ для всех точек $a \in \mathbb{A}$ б) $\overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{qp}$ для всех точек $p, q \in \mathbb{A}$ в) $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc} \Leftrightarrow \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ad}$ для любой четвёрки точек $a, b, b, d \in \mathbb{A}$. Убедитесь также, что во втором определении требование биективности всех преобразований $\tau_v : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ можно заменить требованием, чтобы сдвиг на нулевой вектор действовал тождественно: $\tau_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{A}}$.

Пример 1.5 (аффинная координатная плоскость $\mathbb{A}^2$)
Множество $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^2(\Bbbk)$, точками которого являются пары чисел $p = (p_1, p_2)$ из поля $\Bbbk$ и точкам p, q сопоставляется вектор $\overrightarrow{pq} = q - p = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$ очевидно удовлетворяет предыдущим определениям. Оно называется *аффинной координатной плоскостью* над полем $\Bbbk$.

Пример 1.6 (приведённые квадратные трёхчлены)
Пространство $\mathcal{P}_2$, точками которого являются приведённые[2] квадратные трёхчлены

$$p(x) = x^2 + p_1 x + p_2 \in \Bbbk[x],$$

не является векторным пространством, поскольку сумма приведённых многочленов и произведение приведённого многочлена на число не являются приведёнными многочленами. Однако разности $q - p = (q_1 - p_1)x + (q_2 - p_2)$ приведённых трёхчленов $q = x^2 + q_1 x + q_2$ и $p = x^2 + p_1 x + p_2$ образуют векторное пространство $V = \Bbbk[x]_{\leqslant 1}$ многочленов степени $\leqslant 1$, и при произвольно зафиксированном многочлене p сопоставление $q \mapsto \overrightarrow{pq} \overset{\text{def}}{=} (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$ устанавливает биекцию между $\mathcal{P}_2$ и V, удовлетворяющую предыдущим определениям. Поэтому пространство $\mathcal{P}_2$ является аффинной плоскостью над пространством многочленов степени $\leqslant 1$.

Пример 1.7 (аффинизация векторного пространства)
Из каждого векторного пространства V можно изготовить аффинное пространство $\mathbb{A}(V)$, называемое *аффинизацией* векторного пространства V. Точками пространства $\mathbb{A}(V)$ по определению являются векторы из V. В пространстве $\mathbb{A}(V)$ имеется выделенная точка 0, отвечающая нулевому вектору, а все остальные точки продуктивно воспринимать как «концы» всевозможных «радиус-векторов» $v \in V$, отложенных от нулевой точки. Сдвиг $\tau_v : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ переводит точку a, отвечающую радиус-вектору $a \in V$, в точку $a + v$, отвечающую радиус-вектору $a + v$.

[1] Или *откладывание вектора* v от точек $p \in \mathbb{A}$.
[2] Т. е. со старшим коэффициентом 1.

1.4.1. Аффинная система координат на аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$ по определению состоит из произвольно взятой точки $o \in \mathbb{A}^2$ и базиса e_1, e_2 в векторном пространстве V. Тройку $(o; e_1, e_2)$ также называют *координатным репером* с *началом* в o и *базисом* e_1, e_2. Каждый координатный репер устанавливает биекцию между точками плоскости $\mathbb{A}^2$ и парами чисел, сопоставляющую точке $p \in \mathbb{A}^2$ координаты вектора $\overrightarrow{op}$ в базисе e_1, e_2. Эти координаты называются *аффинными координатами* точки p относительно репера $(o; e_1, e_2)$.

Упражнение 1.7. Убедитесь, что столбец координат вектора $\overrightarrow{pq}$ в произвольном базисе (e_1, e_2) пространства $\Bbbk^2$ равен разности $q-p$ столбцов координат точек $q, p \in \mathbb{A}(\Bbbk^2)$ относительно любого репера $(o; e_1, e_2)$ на аффинной плоскости $\mathbb{A}(\Bbbk^2)$ вне зависимости от выбора начальной точки o этого репера.

Так, в прим. 1.6 коэффициенты (p_1, p_2) трёхчлена $x^2+p_1x+p_2 \in \mathcal{P}_2$ являются его координатами относительно репера $(o; e_1, e_2)$ с начальной точкой $o = x^2 \in \mathcal{P}_2$ и стандартным базисом $e_1 = x$, $e_2 = 1$ в векторном пространстве $\Bbbk[x]_{\leqslant 1}$.

1.4.2. Барицентры и барицентрические комбинации точек. Для любого конечного набора точек $p_1, \dots, p_m$ в аффинном пространстве $\mathbb{A}$ и любых чисел $\mu_1, \dots, \mu_m \in \Bbbk$ с ненулевой суммой $\mu = \sum \mu_i \neq 0$ существует единственная такая точка $c \in \mathbb{A}$, что

$$\mu_1\overrightarrow{cp}_1 + \mu_2\overrightarrow{cp}_2 + \dots + \mu_m\overrightarrow{cp}_m = 0\,. \tag{1-11}$$

В самом деле, задавшись произвольной начальной точкой $o \in \mathbb{A}$, мы можем для любой точки $c \in \mathbb{A}$ записать сумму из левой части (1-11), как

$$\sum \mu_i\overrightarrow{cp}_i = \sum \mu_i\,(\overrightarrow{op}_i - \overrightarrow{oc}) = -\mu\,\overrightarrow{oc} + \sum \mu_i\,\overrightarrow{op}_i\,.$$

Поэтому соотношение (1-11) выполняется для единственной точки c с радиус вектором

$$\overrightarrow{oc} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu_i}{\mu} \cdot \overrightarrow{op}_i\,. \tag{1-12}$$

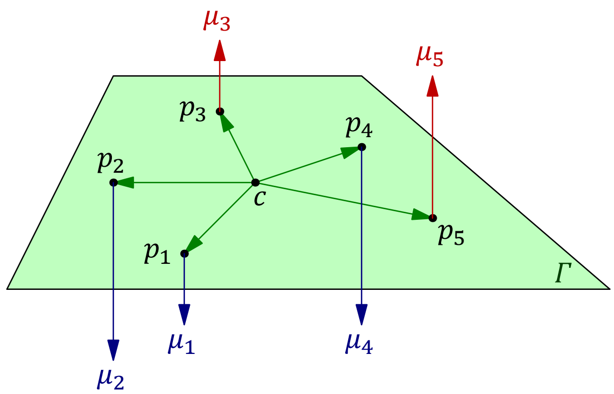

Рис. 1⋄6. Моменты сил.

Эта точка называется *центром тяжести* или *барицентром* точек p_i с весами μ_i. Термин пришёл из механики: если поместить аффинное пространство $\mathbb{A}$ в пространство на единицу большей размерности в качестве горизонтальной гиперплоскости Γ, как на рис. 1⋄6, и приложить к каждой точке p_i силу μ_i, направленную перпендикулярно вниз при $\mu > 0$, и вверх при $\mu < 0$, то равенство (1-11) будет означать равенство нулю суммы моментов всех этих сил относительно точки c. Если оно выполняется, плоскость Γ останется неподвижной, удерживаемая ровно за одну точку c. Так как по предыдущему точка c однозначно определяется соотношением (1-11), в котором точка o никак не участвует, точка

$$o + \overrightarrow{oc} = o + \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu_i}{\mu} \cdot \overrightarrow{op}_i$$

не зависит от выбора точки o. Поэтому для любого набора точек $p_1, \dots, p_m$ и любых констант $\mu_1, \dots, \mu_m$ с суммой $\sum \mu_i = 1$, точка

$$\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \dots + \mu_m p_m \overset{\text{def}}{=} o + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \cdot \overrightarrow{op}_i \tag{1-13}$$

не зависит от выбора начальной точки o, что и оправдывает обозначение, использованное в левой части (1-13). Точка (1-13) называется *барицентрической комбинацией* точек $p_1, \dots, p_m$ с весами $\mu_1, \dots, \mu_m$.

Упражнение 1.8 (группирование масс). Пусть набор точек p_i с весами μ_i и набор точек q_j с весами ν_j имеют центры тяжести в точках p и q, причём обе суммы весов: $\mu = \sum \mu_i$ и $\nu = \sum \nu_j$, а также их сумма $\mu + \nu$ ненулевые. Убедитесь, что центр тяжести объединения всех точек[1] p_i и q_j совпадает с центром тяжести точек p и q, взятых с весами μ и ν. Убедитесь также, что любая барицентрическая комбинация $\sum_i y_i p_i$ точек p_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, каждая из которых в свою очередь является барицентрической комбинацией $p_i = \sum_j x_{ij} q_{ij}$ каких-то ещё точек q_{ij}, $1 \leqslant j \leqslant k_i$, тоже представляется в виде барицентрической комбинации $\sum_{ij} z_{ij} q_{ij}$ тех же точек q_{ij}, причём если все $y_i \geqslant 0$ и все $x_{ij} \geqslant 0$, то и все $z_{ij} \geqslant 0$.

1.5. Прямые. Три точки a, b, p аффинного пространства называются *коллинеарными*, если векторы $\overrightarrow{pa}$ и $\overrightarrow{pb}$ пропорциональны. Например, это так, когда какие-то две из трёх точек совпадают друг с другом. Если $a \neq b$ пропорциональность векторов $\overrightarrow{pa}$ и $\overrightarrow{pb}$ означает, что при некоторых $\alpha, \beta \in \Bbbk$, не обращающихся одновременно в нуль, выполняются равносильные друг другу равенства

$$\beta \cdot \overrightarrow{pa} + \alpha \cdot \overrightarrow{pb} = 0 \quad \iff \quad p = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot a + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot b\,.$$

В этом случае говорят, что точка p *делит* точки a и b в отношении $\alpha : \beta$. Иначе можно сказать, что точка p является барицентрической комбинацией точек a и b с весами $\beta/(\alpha+\beta)$ и $\alpha/(\alpha+\beta)$ соответственно. Каждая точка

$$p = o + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \overrightarrow{oa} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \overrightarrow{ob} = a + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \overrightarrow{ab} = b + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \overrightarrow{ba}\,,$$

коллинеарная паре различных точек $a \neq b$, однозначно определяется отношением $\alpha : \beta$, которое может принимать любые значения, отличные от -1, ибо $\alpha = -\beta$ означает, что $\overrightarrow{pa} = \overrightarrow{pb}$, т. е. $a = b$. При этом значения

$$\alpha : \beta = 0 : 1 = 0 \quad \text{и} \quad \alpha : \beta = 1 : 0 = \infty$$

[1] Если какая-то из точек p_i совпадает с некоторой точкой q_j, то их «объединение» заключается в сложении весов.

допустимы и отвечают точкам $p = a$ и $p = b$ соответственно. Равновесный барицентр[1]

$$c = \frac{a+b}{2},$$

делящий a и b в отношении $1 : 1$, называется *серединой* или *центром* точек $a \neq b$.

Множество всех точек x, коллинеарных двум заданным различным точкам $a \neq b$, называется *прямой* и обозначается

$$(ab) \stackrel{\text{def}}{=} \{x = \alpha a + \beta b \mid \alpha, \beta \in \Bbbk,\ \alpha + \beta = 1\}.$$

Иначе прямую (ab) в аффинном пространстве $\mathbb{A}$ над векторным пространством V можно описать как ГМТ вида $x = a + vt$, где t пробегает основное поле $\Bbbk$, а $p \in \mathbb{A}$ и $v \in V$ суть фиксированные точка и ненулевой вектор, называемые *начальной точкой* и *направляющим вектором* или *вектором скорости* прямой (ab).

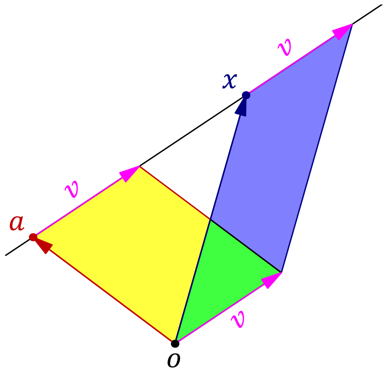

Рис. 1⋄7. Уравнение прямой.

Предложение 1.1

На аффинной плоскости проходящая через точку $a = (a_1, a_2)$ прямая с вектором скорости $v = (v_1, v_2)$ описывается в координатах (x_1, x_2) относительно произвольного репера уравнением

$$\det(x, v) = \det(a, v) \quad \text{или} \quad v_2 x_1 - v_1 x_2 = v_2 a_1 - v_1 a_2. \tag{1-14}$$

Наоборот, множество всех решений $x = (x_1, x_2)$ любого уравнения $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \beta$ с не равными одновременно нулю коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2 \in \Bbbk$ представляет собою прямую с вектором скорости, пропорциональным вектору $v = (\alpha_2, -\alpha_1)$.

Доказательство. Обозначим начало координат через o и рассмотрим векторы $\overrightarrow{ox} = (x_1, x_2)$ и $\overrightarrow{oa} = (a_1, a_2)$. Равенство $\det(v, x) = \det(v, a)$ равносильно равенству $0 = \det(v, \overrightarrow{ax}) = 0$, означающему пропорциональность векторов $\overrightarrow{ax}$ и v. □

Замечание 1.1. На геометрическом языке уравнение (1-14) констатирует равенство площадей жёлтого и синего параллелограммов на рис. 1⋄7.

Упражнение 1.9. Напишите уравнение прямой, параллельной вектору $(5, 2)$ и проходящей через точку $(2, -3)$, а также прямой, проходящей через точки $(-3, 5)$ и $(4, -1)$, и нарисуйте на клетчатой бумаге прямые, заданные уравнениями $3x_1 + 5x_2 = -1$ и $2x_1 - 3x_2 = 5$.

Пример 1.8 (пересечение прямых)

Если левые части уравнений $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \gamma$ и $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = \delta$ не пропорциональны, то решения $x = (x_1, x_2)$ системы

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \gamma \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = \delta, \end{cases} \tag{1-15}$$

[1] Обратите внимание, что он существует над любым полем $\Bbbk$, в котором $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1 \neq 0$. Если основное поле $\Bbbk$ имеет характеристику $\operatorname{char}(\Bbbk) = 2$, т. е. $1 + 1 = 0$ в $\Bbbk$, то середина *не определена*.

суть координаты вектора $\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}$ в координатном пространстве $\Bbbk^2$ относительно базиса из векторов $e_1 = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}$ и $e_2 \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix}$. По правилу Крамера[1] они равны

$$x_1 = \det\begin{pmatrix}\gamma & \alpha_2\\ \delta & \beta_2\end{pmatrix} : \det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix}, \quad x_2 = \det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \gamma\\ \beta_1 & \delta\end{pmatrix} : \det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix}. \tag{1-16}$$

Таким образом, прямые с непропорциональными скоростями пересекаются в единственной точке, координаты которой выражаются через коэффициенты задающих эти прямые уравнений (1-15) по формулам (1-16). Например, прямые $3x_1 + 5x_2 = -1$ и $2x_1 - 3x_2 = 5$ из упр. 1.9 пересекаются в точке с координатами $x_1 = 22/19$, $x_2 = -17/19$.

Если же левые части уравнений (1-15) пропорциональны, скажем: $\beta_1 = \lambda\alpha_1$ и $\beta_2 = \lambda\alpha_2$, то при $\delta \neq \lambda\gamma$ задаваемые этими уравнениями прямые параллельны, а при $\delta = \lambda\gamma$ они совпадают друг с другом.

Таким образом, на аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$ над произвольным полем $\Bbbk$ выполняются евклидовы аксиомы, описывающие взаимное расположение прямых и точек на плоскости, т. е. справедливо

Предложение 1.2

Через любые две различные точки аффинной плоскости проходит ровно одна прямая. Через любую точку, не лежащую на произвольно заданной прямой ℓ, проходит ровно одна прямая, не пересекающая прямую ℓ. □

1.6. Треугольники. В этом разделе мы предполагаем, что $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1 \neq 0$ в поле $\Bbbk$. Фигура, образованная на аффинной плоскости тремя неколлинеарными точками a, b, c и соединяющими их прямыми (ab), (bc), (ca), называется *треугольником* $\vartriangle abc$. Зафиксируем какую-нибудь ненулевую функцию площади s и назовём *площадью ориентированного треугольника* $\vartriangle abc$ половину площади ориентированного параллелограмма, натянутого на упорядоченную пару векторов $\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}$:

$$s(abc) \stackrel{\text{def}}{=} s(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})/2\,. \tag{1-17}$$

Предложение 1.3

Для любого треугольника $\vartriangle abc$ и любой точки p выполняются соотношения:

$$s(abc) = s(bca) = s(cab) = -s(bac) = -s(acb) = -s(cba) \tag{1-18}$$

$$s(abc) = s(pab) + s(pbc) + s(pca)\,. \tag{1-19}$$

Доказательство. Для доказательства соотношений (1-18) достаточно проверить равенства

$$s(bca) = s(abc) \quad \text{и} \quad s(bac) = -s(abc)\,,$$

которые вытекают из билинейности и кососимметричности площади параллелограмма:

$$2s(bca) = s(\overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ba}) = s(\overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{ba}) = s(\overrightarrow{ac}, \overrightarrow{ba}) = s(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}) = 2s(abc)$$
$$2s(bac) = s(\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{bc}) = s(\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ac}) = s(\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{ac}) = -s(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}) = -2s(abc)\,.$$

[1] См. лем. 1.2 на стр. 10.

Равенство (1-19) проверяется примерно так же:

$$2s(abc) = s(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}) = s(\overrightarrow{ap} + \overrightarrow{pb}, \overrightarrow{ap} + \overrightarrow{pc}) = s(\overrightarrow{ap}, \overrightarrow{pc}) + s(\overrightarrow{pb}, \overrightarrow{ap}) + s(\overrightarrow{pb}, \overrightarrow{pc}) =$$
$$= s(\overrightarrow{pc}, \overrightarrow{pa}) + s(\overrightarrow{pa}, \overrightarrow{pb}) + s(\overrightarrow{pb}, \overrightarrow{pc}) = 2\big(s(pab) + s(pbc) + s(pca)\big)\,.$$

□

Пример 1.9 (площади ориентированных многоугольников)
Над полем $\Bbbk = \mathbb{R}$ формула (1-18) имеет следующее наглядное описание. Будем называть *ориентацией* треугольника выбор одного из двух возможных направлений обхода его контура. Обход против часовой стрелки, при котором треугольник остаётся слева по ходу движения, считается положительным, и площади таких треугольников положительны. Площади треугольников, обходимых по часовой стрелке отрицательны. Ориентация треугольников согласована с обсуждавшейся на стр. 11 ориентацией параллелограммов: если выпустить из вершины треугольника два вектора по его сторонам, то ориентация натянутого на них параллелограмма совпадает с той ориентацией контура треугольника, что задаётся движением от конца первого вектора к концу второго по противолежащему выбранной вершине основанию, см. рис. 1◇8.

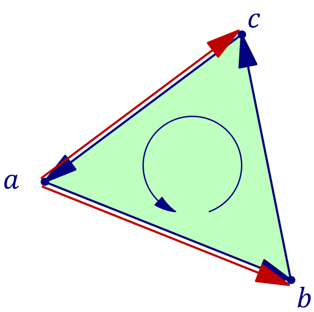

Рис. 1◇8. $2s(abc) = \det(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$.

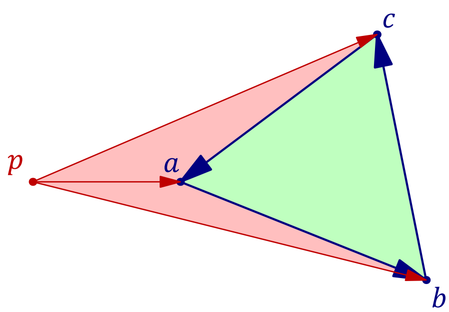

Рис. 1◇9. $s(abc) = s(pab) + s(pbc) + s(pca)$.

При таких договорённостях об ориентации, формула (1-19) утверждает, что площадь ориентированного треугольника abc можно вычислять обходя его контур против часовой стрелки и складывая площади опирающихся на его стороны треугольников с вершиной в произвольно зафиксированной точке p, при этом исходящие из p векторы, используемые для вычисления площадей, всегда упорядочиваются по ходу движения. Так на рис. 1◇9 площадь $\triangle\, pbc$ войдёт в сумму со знаком плюс, а площади $\triangle\, pab$ и $\triangle\, pac$ — с минусами, что и даст площадь $\triangle\, abc$.

Полученная формула очевидным образом обобщается на произвольную, возможно даже самопересекающуюся, как на рис. 1◇10, замкнутую ломаную $q_0 q_1 \,\dots\, q_m$, у которой $q_m = q_0$. Обходя контур ломаной против часовой стрелки и складывая площади опирающихся на её звенья треугольников с вершиной в произвольно заданной точке p, мы получим сумму

$$\sum_{i=0}^{m-1} s(pq_i q_{i+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \det(\overrightarrow{pq}_i, \overrightarrow{pq}_{i+1})$$

равную сумме взятых с надлежащими знаками площадей многоугольников, ограничиваемых этой ломаной. А именно, многоугольники контур которых обходится против часовой стрелки[1],

[1] Т. е. многоугольники, лежащие слева по ходу движения вдоль ломаной.

надлежит учитывать со знаком плюс, а многоугольники, обходимые по часовой стрелке[1] — со знаком минус.

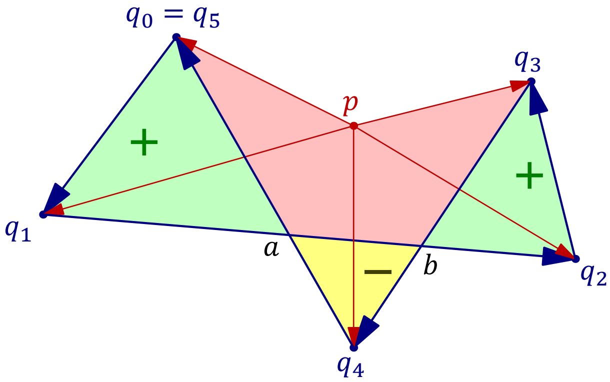

Рис. 1◇10. $\sum_{i=0}^{4} s(pq_iq_{i+1}) = s(q_0q_1a) - s(baq_4) + s(bq_2q_3)$.

Упражнение 1.10. Покажите, ориентированные площади треугольников с общей вершиной и лежащими на одной прямой основаниями относятся как эти ориентированные основания, т. е. для любых трёх коллинеарных точек a, b, c и произвольной точки p выполняется равенство $s(pab) : s(pbc) = \overrightarrow{ab} : \overrightarrow{bc}$, где справа стоит такое число $\lambda \in \Bbbk$, что $\lambda \cdot \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ab}$.

1.6.1. Барицентрические координаты. Зафиксируем на плоскости какой-нибудь треугольник $\triangle abc$ и сопоставим каждой тройке чисел $\alpha, \beta, \gamma \in \Bbbk$ с суммой $\alpha + \beta + \gamma = 1$ точку

$$p = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c\,.$$

Покажем, что это сопоставление устанавливает биекцию между такого рода тройками чисел и точками плоскости. Равенство $p = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c$ означает, что $\overrightarrow{ap} = \beta \cdot \overrightarrow{ab} + \gamma \cdot \overrightarrow{ac}$, т. е. числа β, γ являются координатами вектора $\overrightarrow{ap}$ в базисе $\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}$. Так как пары координат биективно соответствуют векторам, а векторы $\overrightarrow{ap}$ — точкам p, мы имеем биекцию между точками p и произвольными парами чисел (β, γ). Но такие пары биективно соответствуют тройкам $(\alpha, \beta, \gamma) = (1 - \beta - \gamma, \beta, \gamma)$. Числа $\alpha, \beta, \gamma \in \Bbbk$ с суммой $\alpha + \beta + \gamma = 1$ называются *барицентрическими координатами* точки $p = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c$ относительно $\triangle abc$. Использование тройки чисел α, β, γ, связанных соотношением $\alpha + \beta + \gamma = 1$, вместо пары чисел β, γ часто оказывается более удобным, поскольку не привязано к выбору той или иной вершины в треугольнике, что позволяет видеть и использовать имеющиеся в задаче симметрии.

Пример 1.10 (барицентрические координаты как отношения площадей)
Согласно правилу Крамера[2], разложение произвольного вектора $\overrightarrow{ap} \in V$ по базису $\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}$ имеет вид

$$\overrightarrow{ap} = \frac{s(\overrightarrow{ap}, \overrightarrow{ac})}{s(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})} \cdot \overrightarrow{ab} + \frac{s(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ap})}{s(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})} \cdot \overrightarrow{ac} = \frac{s(apc)}{s(abc)} \cdot \overrightarrow{ab} + \frac{s(abp)}{s(abc)} \cdot \overrightarrow{ac}\,.$$

Поэтому барицентрические координаты (α, β, γ) точки p относительно $\triangle abc$ равны

$$\gamma = \frac{s(abp)}{s(abc)}\,, \quad \beta = \frac{s(pca)}{s(abc)}\,, \quad \alpha = 1 - \beta - \gamma = \frac{s(abc) - s(abp) - s(pca)}{s(abc)} = \frac{s(pbc)}{s(abc)}\,,$$

[1] Т. е. лежащие справа по ходу движения.
[2] См. сл. 1.3 на стр. 12.

т. е. являются отношениями площадей треугольников с вершиной p и основаниями на сторонах $\triangle abc$ к площади треугольника $\triangle abc$, ориентированных так, что стороны $\triangle abc$ проходятся в одном направлении как при обходе самого $\triangle abc$, так и при обходе каждого из треугольников с вершиной в точке p:

$$p = \frac{s(pbc)}{s(abc)} \cdot a + \frac{s(apc)}{s(abc)} \cdot b + \frac{s(abp)}{s(abc)} \cdot c\,. \tag{1-20}$$

Пример 1.11 (центр треугольника)

Равновесный барицентр $o = (a + b + c)/3$ вершин треугольника $\triangle abc$ называется *центром* этого треугольника. Согласно упр. 1.8 точка o является центром тяжести любой из вершин и середины противолежащей ей стороны, взятой с весом 2. Таким образом, o является точкой пересечения медиан $\triangle abc$ и делит каждую из них в отношении $2 : 1$, считая от вершины (см. рис. 1◇11). Из формулы (1-20) вытекает, что центр треугольника однозначно характеризуется как единственная такая точка o, для которой $s(oab) = s(obc) = s(oca)$.

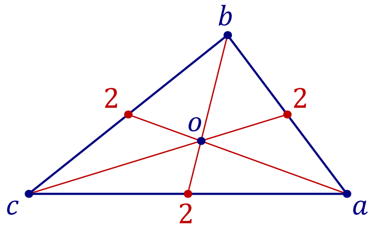

Рис. 1◇11. Центр треугольника.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.1. Равенство $F(0) = 0$ получается прибавлением вектора $-F(0)$ к левой и правой части равенства $F(0) = F(0+0) = F(0) + F(0)$. Из равенства $0 = F(0) = F\big(v + (-v)\big) = F(v) + F(-v)$ вытекает, что $-F(v) = F(-v)$.

Упр. 1.4. Ответ: $v = y_1 w_1 + y_2 w_2$, где $y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2$, $y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2$.

Упр. 1.5. Первое следует из выкладки $0 = f(a+b, a+b) = f(a,b) + f(b,a)$, второе — из выкладки $f(v,v) = -f(v,v)$.

Упр. 1.6. Первое следует из того, что по правилу треугольника $\overrightarrow{aa} + \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ab}$ для любого вектора $\overrightarrow{ab} \in V$, второе — из того, что $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qp} = \overrightarrow{pp} = 0$, третье — из того, что при $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$ имеем $\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ad} + \overrightarrow{dc} = -\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ad} + \overrightarrow{dc} = \overrightarrow{ad}$. Если $\tau_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{A}}$, то для каждого $v \in V$ преобразования τ_v и τ_{-v} обратны друг другу в силу равенств $\tau_v \circ \tau_{-v} = \tau_{-v} \circ \tau_v = \tau_{v+(-v)} = \tau_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{A}}$, а значит, оба биективны.

Упр. 1.8. Первое утверждение проверяется выкладкой

$$(\mu + \nu)^{-1}(\mu p + \nu q) = (\mu + \nu)^{-1}\Big(\sum_i \mu_i p_i + \sum_j \mu_j q_j\Big).$$

Второе — выкладкой

$$\sum_{i=1}^m y_i p_i = \sum_{i=1}^m y_i \sum_{j=1}^{k_j} x_{ij} q_{ij} = \sum_{ij} z_{ij} q_{ij}\,,$$

где $z_{ij} = y_i x_{ij}$ и

$$\sum_{ij} z_{ij} = \sum_{i=1}^m y_i \sum_{j=1}^{k_j} x_{ij} = \sum_{i=1}^m y_i = 1\,.$$

Упр. 1.10. $s(pab) : s(pbc) = s(\overrightarrow{pa}, \overrightarrow{pb}) : s(\overrightarrow{pb}, \overrightarrow{pc}) = s(\overrightarrow{pa} - \overrightarrow{pb}, \overrightarrow{pb}) : s(\overrightarrow{pb}, \overrightarrow{pc} - \overrightarrow{pb}) = s(\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{pb}) : s(\overrightarrow{pb}, \overrightarrow{bc}) = s(\overrightarrow{pb}, \overrightarrow{ab}) : s(\overrightarrow{pb}, \overrightarrow{pc}) = \overrightarrow{ab} : \overrightarrow{bc}$.