Задачи для подготовки к контрольной № 4

ПК4◊1. Найдите угол и расстояние между прямыми, заданными в стандартном ортонормальном базисе евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ уравнениями

$$\textbf{а)}\ \begin{cases} x-2y+8z=3 \\ -2x+5y-19z=-8 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+3y+9z=3 \\ -2x-5y-16z=-4\,. \end{cases}$$

$$\textbf{б)}\ \begin{cases} x+2y-7z=8 \\ -3x-5y+19z=-21 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+2y+4z=9 \\ -3x-5y-9z=-24\,. \end{cases}$$

ОТВЕТ: В (а) первая прямая имеет направляющий вектор $(-2,3,1)$ и проходит через точку $(-1,-2,0)$, вторая прямая имеет направляющий вектор $(-3,-2,1)$ и проходит через точку $(-3,2,0)$, абсолютная величина косинуса угла между прямыми равна $\frac{1}{14}$, а расстояние равно $\frac{14\sqrt{195}}{195}$. В (б) первая прямая имеет направляющий вектор $(3,2,1)$ и проходит через точку $(2,3,0)$, вторая прямая имеет направляющий вектор $(2,-3,1)$ и проходит через точку $(3,3,0)$, абсолютная величина косинуса угла между прямыми равна $\frac{1}{14}$, а расстояние равно $\frac{\sqrt{195}}{39}$.

ПК4◊2. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите координаты ортогональной проекции

а) вектора $(-4,2,1,-1)$ на ортогональное дополнение к линейной оболочке векторов

$$(1,2,3,6) \quad \text{и} \quad (1,2,4,7)\,.$$

б) вектора $(2,4,-1,-3)$ на подпространство, заданное системой уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+4x_4=0 \\ 3x_1+3x_2-5x_3+9x_4=0\,. \end{cases}$$

в) вектора $(3,-1,1,2)$ на линейную оболочку векторов

$$(1,1,3,5)\,, \quad (-2,-2,-5,-9)\,, \quad (-3,-3,-12,-18)$$

а также на ортогональное дополнение к ней.

ОТВЕТ: В (а) базис подпространства составляют векторы $(-2,1,0,0)$ и $(-3,0,-1,1)$ с матрицей Грама $G=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$ и $G^{-1}=\begin{pmatrix} 11/19 & -6/19 \\ -6/19 & 5/19 \end{pmatrix}$; евклидово двойственный базис состоит из векторов $(-4/19, 11/19, 6/19, -6/19)$ и $(-3/19, -6/19, -5/19, 5/19)$, искомая проекция равна $(-70/19, 50/19, 10/19, -10/19)$. В (б) базис подпространства составляют векторы $(-1,1,0,0)$ и $(2,0,3,1)$ с матрицей Грама $G=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$ и $G^{-1}=\begin{pmatrix} 7/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 \end{pmatrix}$; евклидово двойственный базис состоит из векторов $(-5/12, 7/12, 1/4, 1/12)$ и $(1/12, 1/12, 1/4, 1/12)$, искомая проекция равна $(-1,1,0,0)$. В (в) базис линейной оболочки составляют векторы $(1,1,0,2)$ и $(0,0,1,1)$ с матрицей Грама $G=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ и $G^{-1}=\begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$; евклидово двойственный базис состоит из векторов $(1/4, 1/4, -1/4, 1/4)$ и $(-1/4, -1/4, 3/4, 1/4)$, проекция на линейную оболочку равна $(3/4, 3/4, 3/4, 9/4)$, проекция на ортогонал к ней равна $(9/4, -7/4, 1/4, -1/4)$.

ПК4◊3. Является ли ортогональным линейный оператор $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, имеющий в стандартном ортонорамльном базисе матрицу

$$\textbf{а)}\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad \textbf{б)}\begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix} \qquad \textbf{в)}\begin{pmatrix} 2/15 & 11/15 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 14/15 & 2/15 & 1/3 \end{pmatrix}?$$

Если нет, объясните, почему. Если да, то выясните, поворот это или композиция поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота, найдите направление оси и косинус угла поворота.

ответ: в (б) нет, в (а) — поворот, направление оси $(0, 1, 1)$, косинуса угла $\frac{1}{3}$, в (в) композиция поворота с отражением, направление оси $(-2, 4, 1)$, косинуса угла $\frac{2}{5}$.

ПК4◇4. Для оператора $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, имеющего в стандартном ортонормальном базисе

а) матрицу $\begin{pmatrix} -26/27 & 28/27 & 22/27 \\ -2/27 & -2/27 & -44/27 \\ -47/27 & -20/27 & -8/27 \end{pmatrix}$, найдите полярное разложение $F = SG$, где S самосопряжён и положителен, а $G \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$

б) матрицу $\begin{pmatrix} 64/27 & 22/27 & 44/27 \\ -13/27 & 74/27 & -14/27 \\ -26/27 & -14/27 & 53/27 \end{pmatrix}$, найдите полярное разложение $F = GS$, где $G \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, а S самосопряжён и положителен.

ответ: В (а)

$$G = \begin{pmatrix} -14/27 & 22/27 & 7/27 \\ -2/27 & 7/27 & -26/27 \\ -23/27 & -14/27 & -2/27 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 14/9 & -4/9 & 2/9 \\ -4/9 & 14/9 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & 17/9 \end{pmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 13/18 & 2/9 & -1/9 \\ 2/9 & 13/18 & -1/9 \\ -1/9 & -1/9 & 5/9 \end{pmatrix}, \qquad FF^t = \begin{pmatrix} 8/3 & -4/3 & 2/3 \\ -4/3 & 8/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 11/3 \end{pmatrix},$$

где FF^t имеет хар. многочлен $t^3 - 9t^2 + 24t - 16 = (t-4)^2\,(t-1)$. В (б)

$$G = \begin{pmatrix} 22/27 & 7/27 & 14/27 \\ -7/27 & 26/27 & -2/27 \\ -14/27 & -2/27 & 23/27 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 23/9 & 2/9 & 4/9 \\ 2/9 & 26/9 & -2/9 \\ 4/9 & -2/9 & 23/9 \end{pmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 11/27 & -1/27 & -2/27 \\ -1/27 & 19/54 & 1/27 \\ -2/27 & 1/27 & 11/27 \end{pmatrix}, \qquad F^tF = \begin{pmatrix} 61/9 & 10/9 & 20/9 \\ 10/9 & 76/9 & -10/9 \\ 20/9 & -10/9 & 61/9 \end{pmatrix},$$

где F^tF имеет хар. многочлен $t^3 - 22t^2 + 153t - 324 = (t-9)^2\,(t-4)$.

ПК4◇5. Найдите ядро, сингулярные числа, сингулярные направления и образы сингулярных направлений для линейного отображения $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, имеющего в стандартных ортонормальных базисах матрицу

а) $\begin{pmatrix} 2 & -8/9 & -4/9 & 10/9 \\ 2/3 & 4/9 & 14/9 & -11/9 \\ -4/3 & -10/9 & 16/9 & 2/9 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 41/18 & -7/18 & -5/18 & 1/6 \\ -11/18 & 19/18 & -25/18 & -13/6 \\ 31/18 & 25/18 & -13/18 & -1/6 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} -2/5 & 19/15 & -6/5 & -2/15 \\ 6/5 & -2/15 & -2/5 & 31/15 \\ 2/5 & -2/15 & 8/5 & 22/15 \end{pmatrix}$ **г)** $\begin{pmatrix} 11/18 & 13/18 & -23/18 & 5/6 \\ 13/18 & -37/18 & -19/18 & 1/6 \\ -11/9 & 5/9 & 5/9 & -5/3 \end{pmatrix}$.

ответ: В (а) в ортонормальных базисах пространств $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$, образованных столбцами матриц $\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ оператор F имеет диагональную матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Матрица $F^tF = \begin{pmatrix} 56/9 & 0 & -20/9 & 10/9 \\ 0 & 20/9 & -8/9 & -16/9 \\ -20/9 & -8/9 & 52/9 & -2 \\ 10/9 & -16/9 & -2 & 25/9 \end{pmatrix}$ имеет хар. многочлен $t^4 - 17t^3 + 88t^2 - 144t = t(t-9)(t-4)^2$. Матрица $FF^t = \begin{pmatrix} 56/9 & -10/9 & -20/9 \\ -10/9 & 41/9 & 10/9 \\ -20/9 & 10/9 & 56/9 \end{pmatrix}$ имеет хар. многочлен $t^3 - 17t^2 + 88t - 144 = (t-9)(t-4)^2$. В (б) в ортонормальных базисах пространств $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$, образованных столбцами матриц $\begin{pmatrix} 1/6 & -5/6 & 1/2 & -1/6 \\ -5/6 & 1/6 & 1/2 & -1/6 \\ -1/6 & -1/6 & -1/2 & -5/6 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ оператор F имеет диагональную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Матрица $F^tF = \begin{pmatrix} 307/36 & 31/36 & -37/36 & 17/12 \\ 31/36 & 115/36 & -85/36 & -31/12 \\ -37/36 & -85/36 & 91/36 & 37/12 \\ 17/12 & -31/12 & 37/12 & 19/4 \end{pmatrix}$ имеет хар. многочлен $t^4 - 19t^3 + 99t^2 - 81t = t(t-9)^2(t-1)$. Матрица $FF^t = \begin{pmatrix} 49/9 & -16/9 & 32/9 \\ -16/9 & 73/9 & 16/9 \\ 32/9 & 16/9 & 49/9 \end{pmatrix}$ имеет хар. многочлен $t^3 - 19t^2 + 99t - 81 = (t-9)^2(t-1)$. И (в) в ортонормальных базисах пространств $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$, образованных столбцами матриц $\begin{pmatrix} 2/5 & -2/5 & -1/5 & 4/5 \\ -4/5 & 1/5 & -2/5 & 2/5 \\ -2/5 & -2/5 & 4/5 & 1/5 \\ -1/5 & -4/5 & -2/5 & -2/5 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ оператор F имеет диагональную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Матрица $F^tF = \begin{pmatrix} 44/25 & -18/25 & 16/25 & 78/25 \\ -18/25 & 41/25 & -42/25 & -16/25 \\ 16/25 & -42/25 & 104/25 & 42/25 \\ 78/25 & -16/25 & 42/25 & 161/25 \end{pmatrix}$ имеет хар. многочлен $t^4 - 14t^3 + 49t^2 - 36t = t(t-9)(t-4)(t-1)$. Матрица $FF^t = \begin{pmatrix} 29/9 & -4/9 & -22/9 \\ -4/9 & 53/9 & 26/9 \\ -22/9 & 26/9 & 44/9 \end{pmatrix}$ имеет хар. многочлен $t^3 - 14t^2 + 49t - 36 = (t-9)(t-4)(t-1)$. В (г) в ортонормальных базисах пространств $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$, образованных столбцами матриц $\begin{pmatrix} -1/2 & -1/6 & -1/6 & -5/6 \\ 1/2 & 1/6 & -5/6 & -1/6 \\ 1/2 & -5/6 & 1/6 & -1/6 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ оператор F имеет диагональную матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Матрица $F^tF = \begin{pmatrix} 43/18 & -31/18 & -20/9 & 8/3 \\ -31/18 & 91/18 & 14/9 & -2/3 \\ -20/9 & 14/9 & 55/18 & -13/6 \\ 8/3 & -2/3 & -13/6 & 7/2 \end{pmatrix}$ имеет хар. многочлен $t^4 - 14t^3 + 49t^2 - 36t = t(t-9)(t-4)(t-1)$. Матрица $FF^t = \begin{pmatrix} 29/9 & 4/9 & -22/9 \\ 4/9 & 53/9 & -26/9 \\ -22/9 & -26/9 & 44/9 \end{pmatrix}$ имеет хар. многочлен $t^3 - 14t^2 + 49t - 36 = (t-9)(t-4)(t-1)$.