Задачи для подготовки к контрольной № 3

ПК3◇1. Найдите вектор скорости линии пересечения плоскостей

$$9x_1 - 5x_2 + x_3 = 1 \quad \text{и} \quad 4x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 9$$

и какую-нибудь точку на этой линии.

ответ: вектор скорости: $(38, 76, 38)$, точка: $(0, -\frac{17}{38}, -\frac{47}{38})$.

ПК3◇2. Напишите уравнение плоскости в $\mathbb{Q}^3$, проходящей через точку $(3, -9, 7)$ параллельно векторам $(5, 6, 0)$ и $(-3, 14, -10)$.

ответ: $-60x_1 + 50x_2 + 88x_3 = -14$.

ПК3◇3. Напишите уравнение плоскости в $\mathbb{Q}^3$, проходящей через точки $(5, -9, -2)$, $(4, -3, 6)$, $(4, 2, 4)$.

ответ: $-52x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -232$.

ПК3◇4. Вычислите **а)** $\det\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & -5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ **б)** $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

ответ: в (а) 486, в (б) 220.

ПК3◇5. Найдите **а)** $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -6 & 5 & -5 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ **б)** $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & 5 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ **в)** $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$.

ответ: в (а) $\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, в (б) $\begin{pmatrix} \frac{17}{140} & \frac{1}{70} & -\frac{1}{14} \\ \frac{19}{140} & -\frac{3}{70} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$, в (в) $\begin{pmatrix} \frac{5}{33} & \frac{5}{33} & -\frac{4}{33} \\ \frac{5}{11} & -\frac{1}{22} & -\frac{4}{11} \\ -\frac{6}{11} & -\frac{1}{22} & \frac{7}{11} \end{pmatrix}$.

ПК3◇6. Найдите собственные числа, укажите какие-нибудь базисы в собственных и корневых подпространствах и выясните, диагонализуемы ли линейные операторы $\mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$, заданные в стандартном базисе матрицами:
а) $\begin{pmatrix} 13 & 75 & -21 \\ -16 & -108 & 31 \\ -48 & -330 & 95 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -7 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} -7 & 6 & -5 \\ 6 & -11 & 7 \\ 12 & -16 & 11 \end{pmatrix}$ **г)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

ответ: В базисах из столбцов матриц

$$(а) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \\ -3 & 12 & -2 \end{pmatrix}, \quad (б) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 7 & -6 \end{pmatrix}, \quad (в) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \\ -2 & -5 & 6 \end{pmatrix}, \quad (г) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

операторы имеют матрицы

$$(а) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (б) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (в) \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (г) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

ПК3◇7. Напишите такую вещественную 2×2 матрицу A, что

а) $A^5 = \begin{pmatrix} -31 & -16 \\ 56 & 29 \end{pmatrix}$ **б)** $A^4 = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ **в)** $A^3 = \begin{pmatrix} -128 & 25 \\ -650 & 127 \end{pmatrix}$ **г)** $A^2 = \begin{pmatrix} -18 & -5 \\ 80 & 22 \end{pmatrix}$.

ОТВЕТ: в (а) собственые числа: 1, −3, интерполяционный многочлен $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt[5]{-3}}{4} + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt[5]{-3}}{4}\right) \cdot t$, искомая матрица

$$\begin{pmatrix} -7 + 8\sqrt[5]{-3} & -4 + 4\sqrt[5]{-3} \\ 14 - 14\sqrt[5]{-3} & 8 - 7\sqrt[5]{-3} \end{pmatrix},$$

в (б) двукратное собственное число 1, интерполяционный многочлен $\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right) \cdot t$, искомая матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

в (в) собственые числа: −3, 2, интерполяционный многочлен $\frac{3\sqrt[3]{2}}{5} + \frac{2\sqrt[3]{-3}}{5} + \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{5} - \frac{\sqrt[3]{-3}}{5}\right) \cdot t$, искомая матрица

$$\begin{pmatrix} -25\sqrt[3]{2} + 26\sqrt[3]{-3} & 5\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{-3} \\ -130\sqrt[3]{2} + 130\sqrt[3]{-3} & 26\sqrt[3]{2} - 25\sqrt[3]{-3} \end{pmatrix}.$$

в (г) двукратное собственное число 2, интерполяционный многочлен $\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \cdot t$, искомая матрица

$$\begin{pmatrix} -4\sqrt{2} & -\frac{5\sqrt{2}}{4} \\ 20\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

ПКЗ⋄8. Над полем $\mathbb{Q}$ найдите минимальные многочлен матриц

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ **г)** $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

и выясните, диагонализуемы ли эти матрицы.

ОТВЕТ: в (а) $t^3+t^2-t-1 = (t-1)(t+1)^2$, в (б) $t^3-5t^2+8t-4 = (t-2)^2(t-1)$, в (в) $t^3-4t^2+5t-2 = (t-2)(t-1)^2$, в (г) $t^3 - t^2 - 4t + 4 = (t-2)(t-1)(t+2)$.