## Программа коллоквиума по материалам первой четверти

**Сюжет 1.** Определение векторного пространства. Единственность нулевого вектора. Противоположный вектор $-v$ однозначно определяется по $v$. Соотношения $(-1)\cdot v = -v$, $0\cdot v = 0$, $\lambda \cdot 0 = 0$. Примеры векторных пространств. Определитель $2 \times 2$ и правила Крамера для разложения вектора по базису в двумерном векторном пространстве $\Bbbk^2$ и для решения систем из двух линейных уравнений на две неизвестных.

**Сюжет 2.** Два определения аффинного пространства, ассоциированного с данным векторным пространством. Равенства $\overrightarrow{pp} = 0$ и $\overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{qp}$. Равносильность равенств $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs}$ и $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{qs}$. Векторизация и аффинизация. Примеры аффинных пространств. Существование и единственность барицентра набора взвешенных точек. Теорема о группировании масс. Барицентрические комбинации точек, независимость барицентрической комбинации от выбора начальной точки, барицентрическая комбинация барицентрических комбинаций является барицентрической комбинацией.

**Сюжет 3.** Площадь ориентированного параллелограмма в двумерном векторном пространстве: её определение, свойства, существование и единственность с точностью до пропорциональности. Площадь ориентированного треугольника на аффинной плоскости. Равенства $s(abc) = s(bca) = -s(bac)$ и $s(abc) = s(pab) + s(pbc) + s(pca)$. Выражение барицентрических координат точки относительно треугольника на плоскости через площади.

**Сюжет 4.** Определение евклидова пространства и длины вектора. Теорема Пифагора. Ортогональная проекция и нормальная составляющая произвольного вектора по отношению к ненулевому вектору. Существование ортонормального базиса на евклидовой плоскости. Неравенства Коши – Буняковского – Шварца и треугольника.

**Сюжет 5.** Равенство $\det^2(u,w) = \det\begin{pmatrix}(u,u) & (u,w)\\ (w,u) & (w,w)\end{pmatrix}$ на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Положительно и отрицательно ориентированные базисы в $\mathbb{R}^2$. Ориентированный угол $\measuredangle(u,w)$ между векторами $u$, $w$. Равенства

$$\cos\measuredangle(u,w) = \cos\measuredangle(u,v)\cos\measuredangle(v,w) - \sin\measuredangle(u,v)\sin\measuredangle(v,w)$$
$$\sin\measuredangle(u,w) = \cos\measuredangle(u,v)\sin\measuredangle(v,w) + \sin\measuredangle(u,v)\cos\measuredangle(v,w)\,.$$

**Сюжет 6.** Определение прямой. Геометрические свойства уравнения прямой на аффинной плоскости над любым полем и на евклидовой плоскости. Примеры: уравнение прямой, проходящей через две данные точки, расстояние от точки до прямой в $\mathbb{R}^2$, уравнение срединного перпендикуляра к отрезку и уравнения биссектрис углов между двумя заданными прямыми в $\mathbb{R}^2$.

**Сюжет 7.** Аффинные отображения. Независимость дифференциала от выбора начальной точки. Отображение аффинно если и только если оно перестановочно со взятием барицентрических комбинаций. Композиция аффинных отображений аффинна. При любом выборе точки $p$ в аффинном пространстве каждое аффинное преобразование однозначно раскладывается в композицию сдвига и аффинного преобразования, оставляющего точку $p$ на месте. Правило коммутирования аффинного отображения со сдвигом: $F\circ\tau_v = \tau_{D_F(v)}\circ F$. Формулировка теоремы о том, что переводящее прямые в прямые биективное преобразование аффинного пространства размерности не менее два на полями $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}/(p)$ является аффинным (доказательство знать желательно, но не обязательно).

**Сюжет 8.** Скалярное произведение однозначно восстанавливается по функции длины. Движения и подобия аффинного евклидова пространства являются аффинными преобразованиями[1] и сохраняют абсолютную величину углов. Собственное ортогональное линейное преобразование двумерного евклидова векторного пространства является поворотом, а несобственное — отражением. Собственное движение евклидовой плоскости является сдвигом или поворотом, а несобственное — скользящей симметрией. Группа собственных подобий аффинной евклидовой плоскости изоморфна группе аффинных преобразований $z \mapsto az + b$ комплексной прямой, и каждое собственное подобие является сдвигом или поворотной гомотетией, а каждое несобственное подобие является полуаффинным преобразованием вида $z \mapsto a\bar{z} + b$.

**Сюжет 9.** Определения порождающего набора векторов, линейной зависимости и базиса в произвольном векторном пространстве. Набор линейно зависим если и только если один из векторов линейно выражается через другие. Порождающий набор является базисом тогда и только тогда, когда он линейно независим. Каждый минимальный по включению порождающий набор является базисом. Каждый максимальный по включению линейно независимый набор является базисом. Лемма о замене. В конечно порождённом векторном пространстве любой линейно независимый набор включается в базис, любой порождающий набор содержит базис, и все базисы имеют одинаковую мощность. Размерность векторного пространства. В $n$-мерном векторном пространстве каждый линейно независимый набор из $n$ векторов, и каждый порождающий набор из $n$ векторов являются базисами. Базисы $n$-мерного векторного пространства $V$ над полем $\Bbbk$ находятся в биекции с линейными изоморфизмами $\Bbbk^n \xrightarrow{\sim} V$, координаты вектора относительно базиса.

**Сюжет 10.** В конечномерном векторном пространстве $V$ каждое подпространство $U \subset V$ тоже конечномерно и $\dim U \leqslant \dim V$. Пресечения векторных подпространств, линейная оболочка множества векторов, сумма векторных подпространств, равенство $\dim U + \dim W = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)$, неравенство $\dim(U \cap W) \geqslant \dim U + \dim W - \dim V$, трансверсальные подпространства. Прямая сумма подпространств, равенство $V = U \oplus W$ для подпространств $U, W \subset V$ равносильно тому, что $\dim U + \dim W = \dim V$ и $U \cap W = 0$, сумма подпространств $U_1, \dots, U_m$ является прямой, если и только если каждое из подпространств имеет нулевое пересечение с суммой остальных, и если и только если любой набор ненулевых векторов $u_{i_1}, \dots, u_{i_k}$, где $u_\nu \in U_\nu$ и $1 \leqslant k \leqslant m$, линейно независим.

**Сюжет 11.** Определение линейного отображения $f : V \to W$, равенства $f(0) = 0$ и $f(-v) = -f(v)$. Композиция линейных отображений линейна. Подпространства $\ker f$ и $\operatorname{im} f$. Равенства $f^{-1}(f(v)) = v + \ker f$ и $\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$. Линейный эндоморфизм $f : V \to V$ конечномерного векторного пространства $V$ биективен если и только если $\ker f = 0$ и если и только если $\operatorname{im} f = V$.

**Сюжет 12.** Фактор пространство $V/U$ векторного пространства $V$ по подпространству $U \subset V$. Изоморфизм $V/\ker f \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f$ для линейного отображения $f : V \to W$. Равенство $\dim V/U = \dim V - \dim U$.

**Сюжет 13.** Точки $p_0, p_1, \dots, p_k$ аффинного пространства не содержатся в $(k-1)$-мерном аффинном подпространстве если и только если векторы $\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}, \dots, \overrightarrow{p_0p_k}$ линейно независимы, и в этом случае через $p_0, p_1, \dots, p_k$ проходит единственное $k$-мерное аффинное подпространство. Взаимное расположение двух аффинных подпространств в конечномерном аффинном пространстве.

[1] При ответе на этот вопрос разрешается без доказательства использовать тот факт, что переводящее прямые в прямые биективное преобразование вещественного аффинного пространства является аффинным. При этом необходимо уметь чётко формулировать эту теорему и знать определение аффинного отображения.