Лекция 14 ноября (первая половина)

Теорема о разложении $F: V \to V$ лин. оператор

$q(t) \in \Bbbk[t]$, $q(F) = 0$.

$q(t) = q_1(t) \cdot \ldots \cdot q_m(t)$ НОД$(q_i, q_j) = 1$

$\Downarrow$

$V = \oplus W_i$ $W_i = \ker(q_i(F)) = \operatorname{im}(Q_i(F))$

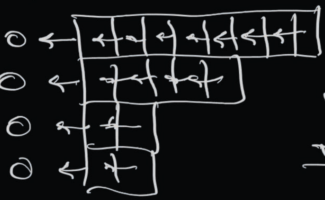
$Q_i = q/q_i = \prod_{j \neq i} q_j$

Классификация нильпотентных операторов

F нильпотентен $\overset{def}{\iff} F^m = 0$

(можно считать, что $m \leq \dim V$)

в V $\exists$ жорданов (циклический) базис



$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$

наз. цикловым типом оператора F

Два нильпотентных оператора подобны $\iff$

$\iff$ у них одинаковый цикловой тип

s-ый столбец диаграммы λ имеет высоту $\dim \ker F^s - \dim \ker F^{s-1}$

Диагонализуемые операторы

$F: V \to V$ наз. диагонализуемым, если в V $\exists$ базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ в котором матрица F_e оператора F диагональна

$$F_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{переставим}}$$

$$F_e \quad \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_{m_1} \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \lambda_1 \ldots \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 \ldots \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_s \ldots \lambda_s \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}\, m_1 \\ \}\, m_2 \\ \vdots \\ \}\, m_s \end{array}$$

$$\chi_F(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\dots(t-\lambda_s)^{m_s}$$

$$\chi_F(t) = \det(tE - F_e)$$

Вывод: Диагональная матрица диагонализуемого оператора с точностью до перестановки диагональных элементов не зависит от выбора базиса, т.к. диагональные элементы - это $\mathrm{Spec}(F)$ = мн-во корней $\chi_F(t)$ и каждый корень λ_i встречается на диагонали ровно m_i раз.

Собственное подпр-во с собственным числом | собственным значен λ)

$$V_\lambda \overset{def}{=} \{v \in V \mid Fv = \lambda v\}$$

Оператор диагонализуем $\Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Spec} F} V_\lambda$

Факт: $V_\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{Spec}_F$.

Док-во: $Fv = \lambda v \Leftrightarrow (\lambda E - F)v = 0$

$v \in \ker(\lambda E - F)$.

$\lambda E - F : V \to V$ ker $\neq 0 \iff$ im $\neq V$

$$\Updownarrow$$

$\det(\lambda E - F) = 0 \iff$ матрица $\lambda E - F$ вырождена

Факт 2: Сумма собственных подпр-в $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s}$ с разными $\lambda_i \neq \lambda_j$ всегда прямая!

Док-во: $v_1, \dots, v_s$ $v_i \in V_{\lambda_i}$ линейно независимы

От противного: пусть

(1) $0 = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_s v_s$ самая короткая по кол-ву эл-тов линейная зависимость

$$\downarrow F$$

(2) $0 = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \mu_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \mu_s \lambda_s v_s$

$-\lambda_1\cdot(1)+(2)$ $(\mu_2\lambda_2-\mu_2\lambda_1)v_2+\ldots+(\mu_s\lambda_s-\mu_s\lambda_1)v_s$

$$\mu_2\underset{\ne 0}{(\lambda_2-\lambda_1)}v_2+\ldots+\mu_s\underset{\ne 0}{(\lambda_s-\lambda_1)}v_s$$

Более короткая линейная зависимость что невозможно

Критерий диагонализуемости:

Следующие св-ва оператора $F: V\to V$ эквивалентны:

(1) F диагонализуем

(2) V порождается собственными векторами оператора F (v собств. с собств. числом λ, если $Fv=\lambda v$).

(3) $\chi_F(t)=\prod\limits_{\lambda\in \operatorname{Spec} F}(t-\lambda)^{m_\lambda}$ и $m_\lambda=\dim V_\lambda$

(4) F аннулируется каким-нибудь многочленом $q(t)\in\mathbb{k}[t]$, который полностью раскладывается на линейные множители и не имеет кратных

корней

Док-во: $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} V_\lambda$

$(1) \Rightarrow (3)$ - очевидно

$(3) \Rightarrow (1)$ по теореме о разложении.

$$\chi_F(t) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} (t-\lambda)^{m_\lambda} \Rightarrow V = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} K_\lambda$$

$K_\lambda = \ker(F - \lambda E)^{m_\lambda}$ (корневое подпр-во).

$V_\lambda < K_\lambda \qquad V_\lambda = \ker(F - \lambda E)$

$\dim V_\lambda = m_\lambda \Rightarrow K_\lambda = V_\lambda \Rightarrow V = \bigoplus V_\lambda$

$(1) \Rightarrow (4)$ очевидно:

$V = \bigoplus V_\lambda \qquad V_\lambda = \ker(\lambda E - F)$

$$\prod \underline{(\lambda E - F)} = 0$$

$\lambda\in\operatorname{Spec}F$

многочлен $\prod\limits_{\lambda\in\operatorname{Spec}F}(t-\lambda)$ аннулирует F

$(4)\Rightarrow(1)$ $q(F)=0$ $q(t)=(t-\lambda_1)\dots(t-\lambda_s)$

$\lambda_i\neq\lambda_j$ при $i\neq j$

По теореме о разложении $V=\bigoplus\underline{\ker(F-\lambda_iE)}$

брать надо только те, что не равны нулю.

Следствие: Ограничение диагонализуемого оператора на любое инвар. подпр-во диагонализуемо на этом подпространстве.

Пример: Если G — это конечная группа операторов $V\longrightarrow V$, то каждый оператор диагонализуем, если $\Bbbk$ алг. замкнуто, а $\operatorname{char}\Bbbk\nmid|G|$.

$g\in G\Rightarrow g^{|G|}=e\Rightarrow g$ аннул.

$t^{|G|}-1=0$

[illegible] многочленом

над алг. замкнутым $\Bbbk$: $|G| \nmid \operatorname{char} \Bbbk$

$$\underline{|G|}\, t^{|G|-1} \neq 0$$

Корневое разложение

Пусть $\chi_F(t) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} (t-\lambda)^{m_\lambda}$.

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} K_\lambda, \quad K_\lambda = \ker (F - \lambda E)^{m_\lambda}$$

корневое подпр-во с собств. числом λ.

каждое K_λ F-инвариантно

$$\begin{pmatrix} F|_{K_{\lambda_1}} & & 0 \\ & F|_{K_{\lambda_k}} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

в базисе, согласов. с корневым разложением

$$F\big|_{K_\lambda} = \underline{\lambda E} + \underbrace{(F - \lambda E)}_{N}\Big|_{K_\lambda} \qquad \boxed{N^{m_\lambda} = 0}$$

F – сумма растяжения и нильпотентного оператора.

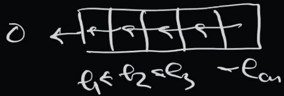
$\Downarrow$

в V есть базис, где матрица F состоит из блоков вида

Жордано

$$J_\lambda(m) = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \lambda \end{pmatrix}\right\} m}_{m}$$

Теорема Жордана



Вычисление функций от операторов

Предположения: (1) $\Bbbk = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$

(2) Оператор $F : V \to V$ аннулируется многочленом $\alpha(t) = \prod_i (t-\lambda_i)^{m_i}$

$\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$

(3) $\mathcal{A}$ – алгебра функций $U \to \Bbbk$

где $U \subset \mathbb{k}$ открытое подмножество, содержащее все корни λ_i мн-на α.

(4) $\mathcal{A} \supset \mathbb{k}[t]$

(5) $\forall$ корня λ многочлена α и любой функции $f \in \mathcal{A}$ должно существовать разложение Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(t) = f(\lambda) + f'(\lambda)(t-\lambda) + f''(\lambda)\frac{(t-\lambda)^2}{2} + \ldots$$

$$+ f^{(m_\lambda - 1)}(\lambda)\frac{(t-\lambda)^{m_\lambda - 1}}{(m_\lambda - 1)!} + \underbrace{(t-\lambda)^{m_\lambda} \cdot g(t)}$$

где $g(t) \in \mathcal{A}$. $\boxed{m_\lambda \text{ - кратность корня}}$