Лекция 9 декабря (первая половина)

Линейные операторы

$F: V \to V$, $\dim V < \infty$

Пара (F, V) – пространство с оператором.
(или просто оператор).

$(F_1, V_1) \xrightarrow{f} (F_2, V_2)$ гомоморфизм пространств с операторами

Это такое линейное отображение $f: V_1 \to V_2$, перестановочное с действием операторов.

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & V_1 \arrow[d, "f"] \\ V_2 \arrow[r, "F_2"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

$fF_1 = F_2 f$

Операторы $F_1: V_1 \to V$, и $F_2: V_2 \to V_2$ изоморфны, если $\exists$ обратимый гомоморфизм $f: (V_1, F_1) \xrightarrow{\sim} (V_2, F_2)$.

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "f"', "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\curvearrowright"] & V_1 \arrow[d, "f", "\wr"'] \\
V_2 \arrow[r, "F_2"'] & V_2
\end{tikzcd}$$

$F_2 = f F_1 f^{-1}$

F_2 и F_1 называются подобными (или изоморфными)

F_2 получается из F_1 посредством линейного изоморфизма f.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "f"', "\wr"] & V \arrow[d, "f", "\wr"'] \\
V \arrow[r, "F_2"'] & V
\end{tikzcd}$$

$f F_1 f^{-1}$

На языке матриц, сопряжение — это запись матрицы того же самого оператора в другом базисе.

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "C"', "\wr"] & \Bbbk^n \arrow[d, "C", "\wr"'] \\
\Bbbk^n \arrow[r, "B"'] & \Bbbk^n
\end{tikzcd}$$

$x \to Ax$

$x \to Bx$

$B = CAC^{-1}$

$$\boxed{V \xrightarrow{F} V}$$

Подпр. во $U < V$ F-инвариантно, если $F(U) \subset U$. Оператор называется разложимым, если $V = \underline{U \oplus W}$:

$F(U) \subset U$ & $F(W) \subset W$

В базисе, согласованном с суммой? матрица F будет иметь блочный вид:

$$F = \begin{array}{c|c|c} & U & W \\ \hline U & F_U & 0 \\ \hline W & 0 & F_W \end{array}$$

Любое пр. во с оператором — это прямая сумма неразложимых.

Пр. во с оператором $F: V \to V$ наз. приводимым, если $\exists\, U \subsetneq V,\ U \neq 0$: $F(U) \subset U$ (т.е. в V есть нетривиальные F-инвариантные подпространства).

$V \xrightarrow{F} V$ наз. неприводимым (или простым) если инвариантных нетривиальных подпр-в нет.

Очевидно, что неприводимое пр-во с оператором неразложимо, но обратное **НЕВЕРНО**.

$$F : \frac{\Bbbk[t]}{(t^n)} \longrightarrow \frac{\Bbbk[t]}{(t^n)} = V, \quad [f] \mapsto [tf]$$

приводимость: $\forall k$ классы, делящиеся на $[t^k]$ образуют F-инвариантное подпр-во $\{[t^k f], f \in \Bbbk[t]\}$

В базисе $[t^{n-1}], [t^{n-2}], \dots, [1]$ F имеет матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 \leftarrow [t^{n-1}] \leftarrow [t^{n-2}] \leftarrow \dots \leftarrow [1]$$

Неразложимость: если $V = U \oplus W$

или в U или в W обязательно есть многочлен с $\neq 0$ свободным членом.

$\mathrm{im}(F) \neq V$, если $U, W \subset \mathrm{im}(F)$ то $\mathrm{im}\, F = V$.

$f = \overset{\neq 0}{a_0} + a_1 t + \dots \in V$.

Тогда многочлены $f, tf, \dots, t^{n-1}f$ линейно независимы. ⇒ они базис в V ⇒

$U = V$.

Теорема из алгебры: Над произвольным полем каждое неразложимое конечномерное пр-во с оператором изоморфно оператору умножения на класс $[t]$ в фактор кольце $\frac{\Bbbk[t]}{(p^m(t))}$, где p - приведённый неприводимый многочлен.

Такое пр-во неприводимо ⟺ $m = 1$.

Любое пр-во с оператором изоморфно

прямой сумме

$$\frac{\mathbb{k}[t]}{(p_1^{m_1}(t))} \oplus \frac{\mathbb{k}[t]}{(p_2^{m_2}(t))} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{k}[t]}{(p_s^{m_s}(t))}$$

(слагаемые, буквы p_i, буквы m_i могут быть повторяющимися) и два таких пр-ва изоморфны $\Leftrightarrow$ они различаются перестановкой слагаемых.

Инварианты операторов.

μ_F - минимальный многочлен оператора $F : V \to V$ — это многочлен $\mu_F(t)$ со старшим коэф-том 1, наименьшей положительной степени, такой что $\mu_F(F) = 0$.

$$(\mu_F) = \ker ev_F : \mathbb{k}[t] \longrightarrow \mathrm{End}(V)$$
$$f(t) \longmapsto f(F).$$

Как искать μ_F?

Берём вектор $v \in V$, $v \neq 0$

Ищем наименьшее k: $F^k v$ линейно выражается через $F^{k-1}v, F^{k-2}v, \dots, Fv, v$

$$\boxed{F^k v = \lambda_1 F^{k-1} v + \dots + \lambda_k v}$$

$$(F^k - \lambda_1 F^{k-1} - \dots - \lambda_k E)\, v = 0$$

$\mu_{F,v}(F)$, где $\mu_{F,v}(t) \in k[t]$ – многочлен наименьшей положит. степени со ст. к-том 1, такой что $\mu_{F,v}(F)v = 0$. $\mu_{F,v}(t)$ делит любой многочлен $f(t)$: $f(F)v = 0$

$$f(t) = q(t) \cdot \mu_{F,v}(t) + r(t)$$

берём $t = F$ и применяем к v

$$\left[\begin{array}{l} r = 0 \\ \deg r < \deg \mu_{F,v} \end{array}\right.$$

$$\underset{0}{\cancel{f(F)}}v = q(F)\cdot \underset{0}{\cancel{\mu_{F,v}(F)}}\cdot v + r(F)v$$

$\Uparrow$

$r(F)v = 0 \Rightarrow r = 0$

$\mu_{F,v}(t)$ делит минимальный? многочлен $\mu_F(t)$ $\forall v$. $\Rightarrow \mu_F(t) = \text{НОК}\left(\mu_{F,v}(t) \mid v\in V\right)$

Достаточно брать в качестве v векторы из какого-нибудь базиса $e_1, \dots, e_n \in V$,

если $f(F)e_i = 0$ $\forall i$, то $f(F)v = 0$ $\forall v \in V$.

$\text{НОК}\left(\mu_{F,e_i} \mid e_i \text{ пробегает базис}\right) = \text{НОК}\left(\mu_{F,v} \mid v\in V\right) = \mu_F(t)$.

$\chi_F(t) = \det(tE - F)$ тоже инвариант оператора F.

$F \to CFC^{-1}$

$$\chi_{CFC^{-1}}(t) = \det(tE - CFC^{-1}) =$$

$$= \det(C(tE-F)C^{-1}) =$$

$$= \cancel{\det C} \cdot \det(tE-F) \cdot \cancel{\det^{-1} C}$$

$$= \chi_F(t)$$

Замечание $\chi_F(t)$ делится на $\mu_F(t)$!

$\boxed{\text{Знание какого-нибудь аннулирующего многочлена многое говорит об операторе}}$

Теорема о разложении: Пусть оператор $F: V \to V$ аннулируется многочленом $q(t) \in \Bbbk[t]$, и пусть $q(t) = q_1(t) \cdot q_2(t) \cdot \ldots \cdot q_m(t)$ где

НОД$(q_i, q_j) = 1 \quad \forall i \neq j$.

Обозначим: $Q_i(t) = \dfrac{q(t)}{q_i(t)} = \prod\limits_{j \neq i} q_j(t)$

$$= q_1 q_2 \dots q_{i-1} q_{i+1} \dots q_m$$

Тогда: $\ker q_i(F) = \operatorname{im} Q_i(F) \quad \forall i$

и V является прямой суммой тех из этих подпр-в, которые отличны от нуля.

Замечание: подпр-ва $\ker f(F)$ и $\operatorname{im} f(F)$ всегда F-инвариантны $\forall f$.

$$f(F)v = 0 \Rightarrow f(F)Fv = F f(F)v = 0$$

$$w = f(F)v \Rightarrow Fw = F f(F) v =$$

$$= f(F)Fv \in \operatorname{im} f(F)$$