Лекция 2 декабря (вторая половина)

∀ матрицы (и любого оператора
размерности
на n-мерном пр-ве V) можно явно предъявить многочлен степени n который? её зануляет (он не обязан быть минимальным).

$$C=(c_{ij})\in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk).$$

$$\chi_C(t)=\det(tE-C)\in\Bbbk[t]$$

/ характеристический? многочлен матрицы C.

$$\|$$

$$\det\begin{pmatrix} t-c_{11} & -c_{12} & -c_{13} & \dots \\ -c_{21} & t-c_{22} & -c_{23} & \dots \\ -c_{31} & -c_{32} & t-c_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ & & & (t-c_{nn}) \end{pmatrix}=$$

$$= t^n - \sigma_1(C)t^{n-1} + \sigma_2(C)t^{n-2} - \sigma_3(C)t^{n-3} + \ldots$$

$$+ (-1)^n \sigma_n(C)$$

$(-1)^k \sigma_k(C)$ – это коэфф-т при t^k

$\sigma_1 = tr(C) = \sum c_{ii}$

$\sigma_n = \det(C)$

Утв: σ_k – это сумма главных $k\times k$-миноров матрицы C

сумму определителей всех $k\times k$-подматриц в C, у которых главная диагональ является подмножеством главной диагонали матрицы C.

Минор – это определитель квадратной подматрицы

главная подматрица — такая, что её главная диагональ содержится в главной диагонали C

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$\chi_C(t) = t^3 - tr(C)\cdot t^2 +$$
$$+ t\left(\det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{13}\\ c_{31} & c_{33}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} c_{22} & c_{23}\\ c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}\right)$$
$$- \det C.$$

Тождество Гамильтона-Кэли:

$$\chi_C(C) = 0 \qquad \chi_C(t) = \det(tE - C)$$

Это тождество буквенное, т.е. справедливое для матриц с элементами из кольца $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[c_{ij}]$

n^2 независимых переменных

$\chi_C(t)$ — не всегда минимальный

$$C = E = \begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix} \qquad \mu_E(t) = t - 1$$
$$\chi_E(t) = (t-1)^n$$

$$(tE - C) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}[t]).$$

Наблюдение: для любого ком. кольца K с единицей

! $$\mathrm{Mat}_n(K[t]) = \mathrm{Mat}_n(K)[t]$$

$$\nearrow$$

$$\begin{pmatrix} t^3 - t + 1 & 2t + t^2 \\ 2t^2 + 3 & t^3 + t^2 - 2t - 1 \end{pmatrix} =$$

$$= t^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ t \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A(t) \cdot B(t) \neq B(t) \cdot A(t).$$

$\forall\, C \in \mathrm{Mat}_n(K)$ можно устроить вычисление ev_C:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mat}_n(K[t]) \arrow[d, phantom, "\parallel"] & \\ \mathrm{Mat}_n(K)[t] \arrow[r] & \mathrm{Mat}_n(K) \end{tikzcd}$$

$$A(t) \longmapsto A(C)$$

$$t^n A_n + t^{n-1} A_{n-1} + \dots + A_0 \longmapsto C^n A_n + C^{n-1} A_{n-1} + \dots + A_0$$

линейное над K отображение.

Однако! $A(t)\cdot B(t) = Q(t)$

$$\not\Downarrow$$

$$A(C)\cdot B(C) = Q(C)$$

$$\begin{tikzcd} \sum\limits_{i\geq 0} t^i A_i \cdot \sum\limits_{j\geq 0} t^j B_j = \sum\limits_{k\geq 0} t^k Q_k \arrow[d, "ev_C"] & Q_k = \underline{\sum\limits_{i+j=k} A_i B_j} \\ \sum C^i A_i \sum C^j B_j \neq \sum C^k Q_k & \end{tikzcd}$$

$$\Vert \quad \sum_{i+j=k} C^i A_i C^j B_j \neq C^k \sum_{i+j=k} A_i B_j$$

Если матрица C коммутирует с $A(t)$, т.е. $CA_i = A_i C$ $\forall i$, то тогда верно, что $A(C)\cdot B(C) = Q(C)$.

Док-во тождества Гамильтона-Кэли

перестановочны

$$(tE-A)(tE-A)^{\vee} = \det(tE-A)\cdot E$$

в силу главного тождества

если записать все матрицы как многочлены от t с матричными коэффициентами, то получим

$$\underbrace{(tE-A)}_{\text{комм. с } A}\left(t^{n-1}A^{*}_{n-1} + t^{n-2}A^{*}_{n-2} + \dots + A^{*}_{0}\right) =$$

$$A^{*}_{i} \in Mat_n(\mathbb{K})$$

$$= \left[t^{n} - t^{n-1}\sigma_1(A) + \dots + (-1)^{n}\sigma_n(A)\right]E$$

числ

$$\chi_A(t)\cdot E$$

подставив $t = A$

$$0 = \chi_A(A)\cdot E$$

$$\chi_A(A) = 0$$

Упр: сначала раскрыть скобки, потом подставить $t = A$

Следствие для операторов: $\forall$ линейного оператора $F: V \to V$ оператор $\chi_{F_e}(F)$ нулевой, где F_e - матрица F в любом базисе e пр-ва V.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(t) = t^2 - (a_{11} + a_{22})t + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$

Упр: Явно сосчитать $\chi_A(A)$.