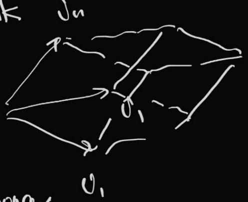
Лекция 30 ноября (первая половина)

V – векторное пр-во размерности n над $\mathbb{K}$

В прошлый раз мы

- определили формы ориентированного n-мерного объёма $\omega : \underbrace{V\times\ldots\times V}_{n} \longrightarrow \mathbb{K}$



- Любая форма объёма
  - зануляется на линейно зависимых наборах $v_1\ldots v_n$
  - линейна по каждому аргументу (полилинейна, или n-линейна)
  - кососимметрична и (автоматически) (знакопеременна $\omega(\ldots u\ldots w\ldots) =$ $= -\omega(\ldots w\ldots u\ldots)$

    $\omega(\ldots v\ldots v\ldots)=0$
- Всякая n-линейная кососимм. форма имеет вид $\underline{\omega(v_1,\ldots,v_n) = \det C_{ev}\cdot\omega(e_1\ldots e_n)}$

где $e_1, \dots, e_n$ – это какой-то базис в V

$v_1, \dots, v_n$ – любые векторы

C_{ev} – матрица перехода: $(v_1, \dots, v_n) = (e_1 \dots e_n) C_{ev}$

j-тый столбец C_{ev} – это столбец координат вектора v_j в базисе $(e_1, \dots, e_n)$.

(В частности, любые две полилинейные кососимм. формы пропорциональны

$$\frac{\omega_1(v_1 \dots v_n)}{\omega_2(v_1, \dots v_n)} = \frac{\omega_1(e_1, \dots, e_n)}{\omega_2(e_1, \dots, e_n)}$$
)

Утв. Всякая полилинейная кососимм. форма является формой объёма

Док-во: $\omega : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n} \longrightarrow \mathbb{K}$

полилинейна и кососимм.-на

(1) $\omega(\dots \lambda v \dots) = \lambda \omega(\dots v \dots)$

это часть полилинейности.

(2) $\omega(\dots u \dots w \dots) \overset{?}{=} \omega(\dots u + \lambda w \dots w \dots)$

$\parallel$ да! $\qquad \parallel$ из линейности

$\omega(\dots u \dots w \dots) + \lambda \omega(\dots w \dots w \dots)$

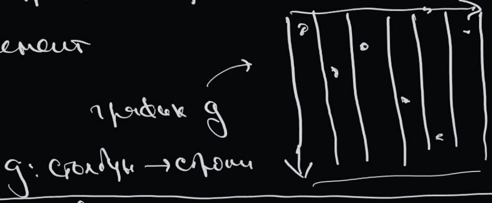
0 из кососимм.

$$\omega(v_1,\dots,v_n)=\omega(e_1,\dots,e_n)\cdot \det C_{ev}$$

Определитель: $C=(c_{ij})\in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$

$$\boxed{\det C=\sum_{g\in S_n}\operatorname{sgn}(g)\,c_{g(1)1}c_{g(2)2}\dots c_{g(n)n} \qquad g:\{1,\dots,n\}\xrightarrow{1:1}\{1,\dots,n\}}$$

В каждом столбце матрицы C надо выбрать по элементу так, чтобы в каждой строке оказался выбран ровно один элемент

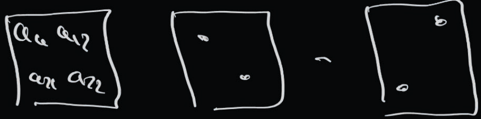


$$\operatorname{sgn}(g)=(-1)^{l(g)}$$ $l(g)$ – число инверсных пар. = длина g.

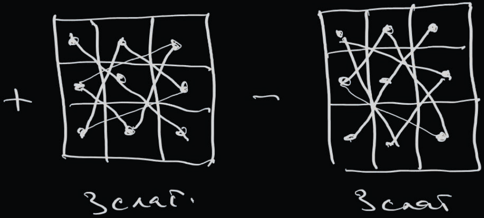
$$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$ всего пар.

$\underline{\underline{i<j}}$ инверсия если $g(i)>g(j)$

Упр: найти $\max(\ell(g) \mid g\in S_n)$ и понять на каких g он достигается



$a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$

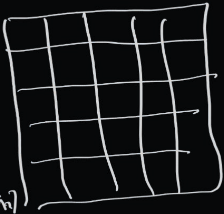


Факт $\det C=\det C^t$

$$\det C=\sum_{g\in S_n}\operatorname{sgn}(g)\,\underline{c_{g(1)1}\cdots c_{g(n)n}}$$

$$\uparrow g\leftrightarrow g^{-1}$$

$$\det C^t=\sum_{g}\underset{\shortparallel}{\underline{\operatorname{sgn}(g)}}\,\underline{c_{1g(1)}\cdots c_{ng(n)}}$$



$$=\sum_{g^{-1}\in S_n}\underline{\operatorname{sgn}(g^{-1})}\,\underline{c_{g^{-1}(1)1}\cdots c_{g^{-1}(n)n}}$$

$\operatorname{sgn}(g)=\operatorname{sgn}(g^{-1})$ инверсные пары у g и g^{-1} одни и те же.

Факт: det C полилинеен и кососимм. как функция столбцов и как функция строк

$$\sum_{g} \mathrm{sgn}(g)\, c_{g(1)1} \cdots c_{g(n)n}$$

линеен по j-тому столбцу $\underline{c_{g(j)j}}$

полилинейность очевидна.

Кососимм.: пусть i-тый столбец равен j-тому.

$\underline{c_{vi} = c_{vj}}$ ∀v.

$$\sum \mathrm{sgn}(g)\, c_{g(1)1} \cdots c_{g(n)n}$$

σ_{ij} — транспозиция $i \leftrightarrow j$

$$\underline{g} \longleftrightarrow h = \underline{g\sigma_{ij}}$$

$$\mathrm{sgn}(g) = -\mathrm{sgn}(h)$$

а произведения одинаковые

$g: \ldots \underline{c_{g(i)i}} \ldots \underline{c_{g(j)j}} \ldots$

$h = g\sigma_{ij}: \ldots c_{g(j)i} \ldots c_{g(i)j} \ldots$

$\parallel \qquad \forall\; c_{vi} = c_{vj}$

$\ldots \underline{c_{g(j)j}} \ldots \underline{c_{g(i)i}} \ldots$

$(v_1, \ldots, v_n) \longrightarrow \det C_{ev}$ Эта форма объёма ненулевая!

$(e_1, \ldots, e_n) \longrightarrow \det E = 1$ $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$$\det \begin{array}{c|c|c|c} & k & & \\ \hline k & A & * & \\ \hline & 0 & B & m \\ \hline & & m & \end{array} = \underline{\underline{\det A \cdot \det B}}$$

!

Зам: Можно накапливать нули в ЛНУ (или в ПВУ) преобразуя матрицу по Гауссу

- Преобразование 1-ти $\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} a + \lambda b \\ b \end{matrix}$

не меняет определитель

- Преобразование 2-го типа: $\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \to \begin{matrix} b \\ a \end{matrix}$ умножает det на -1
- Преобразование $a \to \lambda a$ умножает det на λ.

Определитель линейного оператора

$F : V \to V$ лин. оператор.

$\forall$ ненулевой формы объёма ω на V форма $\omega_F(v_1, \dots, v_n) = \omega(Fv_1, \dots, Fv_n)$ тоже полилинейна и кососимметрична

$$\frac{\omega_F(v_1, \dots, v_n)}{\omega(v_1, \dots, v_n)}$$ – это константа, не зависящая от $v_1, \dots, v_n$

//

det F — не зависящее от ω

определитель оператора F.

Оператор F умножает объёмы всех параллелепипедов на одно и то же число, которое не зависит ни от параллелепипеда, ни от формы объёма. Если $v_1, \dots, v_n$ о другой базис, то

$$\frac{\omega_F(v_1, \dots, v_n)}{\omega(v_1, \dots, v_n)} = \frac{\omega(Fv_1, \dots, Fv_n)}{\omega(v_1, \dots, v_n)} = \det F_v$$

$$(Fv_1, \dots, Fv_n) = (v_1, \dots, v_n) \cdot F_v$$

$$\omega_F(v_1, \dots, v_n) = \omega(Fv_1, \dots, Fv_n) = \omega(v_1 \dots v_n) \cdot \det F_v$$

Вывод: $\det F_v$ не зависит от выбора базиса и равен $\det F$.

Теорема $\det FG = \det F \det G$.

G умножает все объёмы на $\det G$

F умножает все объёмы на $\det F$

$\Downarrow$

FG умножает все объёмы на $\det F \det G$

Следствие: $\det AB = \det A \det B$

$\forall A, B \in \mathrm{Mat}_n(k)$.

$\mathrm{Mat}_n(K)$ K - любое комм. кольцо с единицей?,

$$\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B}$$

равенство двух многочленов от $2n^2$ переменных a_{ij} и b_{ij} с целыми коэфф-тами.

Формально: Рассмотрим кольцо многочленов $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[a_{ij}, b_{ij}]$

$2n^2$ переменных
$1 \leq i,j \leq n$

$A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$

$B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$.

Тогда в $\mathbb{K}$ выполнено равенство

$$\underline{\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B).}$$

Док-во: Факт: если $\mathbb{K}$ - бесконечное поле $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_N]$

то $f = 0 \iff$ функция $\tilde{f} : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$

$(a_1, \dots, a_N) \mapsto f(a_1, \dots, a_N)$

нулевая

↙

Индукция по N $N = 1$.

$f \equiv 0$ на $\mathbb{K} \Rightarrow$ бесконечно много корней $\Rightarrow f = 0$.

$$f(x_1, \dots, x_N) = \sum_{m \geq 0} g_m(x_1, \dots, x_{N-1}) \cdot x_N^m$$

$\forall$ набор значений $a_1, \dots, a_{N-1} \in \mathbb{K}^{N-1}$

$f(a_1,\dots,a_{N-1},x_N) \equiv 0$ на $\mathbb{K}$

$$\Downarrow$$

все коэф-ты $\underline{\underline{g_j(a_1,\dots,a_{N-1})}} = 0$

⇙ по индукции

все $g_j(x_1,\dots,x_{N-1}) = 0$ в $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_{N-1}]$

◦ Чтобы доказать равенство нулю многочлена из $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_N]$ достаточно проверить, что он задаёт тождественно нулевую функцию на $\mathbb{Q}^N$.

Для док-ва равенства $\det(AB)=\det A\cdot\det B$ в $\mathbb{K}$ достаточно доказать это равенство $\forall A,B\in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q})$, что уже было сделано выше