Лекция 25 ноября (вторая половина)

Простейший пример: многочлены

$\mathbb{k}[x]$ базис состоит из мономов

$1, x, x^2, \dots$

Базис счётный.

$\mathbb{k}[x]^* \simeq$ бесконечным последовательностям $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$

$\varphi : \mathbb{k}[x] \longrightarrow \mathbb{k}$ однозначно задаётся значениями на базисных векторах $\varphi_i = \varphi(x^i)$ $i \geq 0$

$x^0 = 1$

$f = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$, $m = \deg f$

$$\boxed{\varphi(f) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i}$$

$\forall$ последовательности $\varphi : \mathbb{Z}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{k}$

$i \longmapsto \varphi_i$

$\exists!$ линейная функция $\varphi : \mathbb{k}[x] \longrightarrow \mathbb{k}$ с такими значениями $\varphi(x^i) = \varphi_i$

$$(\varphi_i)_{i\geq 0} \rightsquigarrow \varphi(t)=\sum_{k\geq 0}\varphi_k t^k \in \Bbbk[[t]]$$

$$\boxed{\Bbbk[x]^* \simeq \Bbbk[[t]]}$$

линейный изоморфизм

(сопоставление последовательности ряда можно выбирать по разному)

$$\Phi(t)=\sum \varphi_i t^i \longrightarrow \varphi : \Bbbk[x] \to \Bbbk$$

$$x^i \longmapsto \varphi_i$$

В ряд $\Phi(t)$ можно подставить вместо t любой ряд без свободного члена

$$\psi(t)=a_1t+\dots$$

$\Phi(\psi(t))$ – определено хорошо

$\alpha\in\Bbbk$ $\quad ev_\alpha : \Bbbk[x]\to\Bbbk : f\longmapsto f(\alpha)$

Какой ряд ему соответствует?

$$\varphi_i=\alpha^i=ev_\alpha(x^i)$$

$$1+\alpha t+\alpha^2t^2+\alpha^3t^3+\dots=\frac{1}{1-\alpha t}$$

Все такие функционалы линейно независимы

$$\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1 t} + \dots + \frac{\lambda_n}{1-\alpha_n t} = 0$$

$$\lambda_1 \prod_{\nu \neq 1} (1-\alpha_\nu t) + \dots + \lambda_n \underbrace{\prod_{\nu \neq n} (1-\alpha_\nu t)}_{} = 0$$

$t = \alpha_1^{-1} \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$t = \alpha_2^{-1} \Rightarrow \lambda_2 = 0$

$\mathbb{R}[t]$ счётномерно

$\mathbb{R}[t]^*$ – нет!

там есть несчётное линейно независимое множество

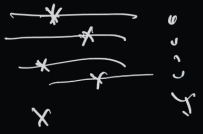
ev – аббревиатура от evaluation

вычисление

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\varphi"] & Y \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

φ – инъекция

$\exists \tilde{\varphi} : \tilde{\varphi}\varphi = Id_X$



$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, two heads, "\pi"] & Y \arrow[l, bend left, dashed] \end{tikzcd}$$

π сюръекция

$\exists \tilde{\pi} : \pi\tilde{\pi} = Id_Y$.

хочется чтоб было.

$\Bbbk[[t]]$ формальные степенные ряды

тут есть базис

Но его НИКТО НИКОГДА НЕ ВИДЕЛ ЯВНО

$\mathbb{R}[[t]]$ хз

ОБЪЁМ

V $\dim V = n$ векторное пр-во

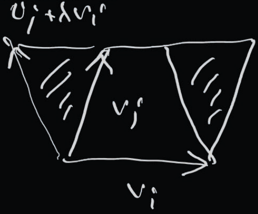
$\omega : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n} \longrightarrow \Bbbk$ наз. n-мерным ориентированным объёмом (параллелепипеда)

$\omega(v_1, \dots, v_n)$

если выполнены 2 свойства:

(1) $\omega(\dots \lambda v \dots) =$

"...." – ничего не меняется



$= \lambda\omega(\dots v \dots)$

(2) $\omega(\dots u \dots v \dots) =$

$= \omega(\dots u+\lambda v \dots v \dots)$

Дополнительные свойства:

(1) Если $v_1, \dots, v_n$ линейно зависимы, то $\omega(v_1, \dots, v_n) = 0$

$v_1 = \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$

$\omega(0 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n, v_2, \dots, v_n) \overset{(2)}{=}$

$= \omega(0, v_2, \dots, v_n) \overset{(1)}{=} 0 \cdot \omega(0, v_2, \dots, v_n).$

(2) ω кососимметрична:

$\omega(\dots v \dots v \dots) = 0 \quad \forall v$

(3) Полилинейность (линейность по каждому аргументу).

$\omega(\underline{\dots u+w \dots}) = \underbrace{\omega(\underline{\dots u \dots})}_{А} + \underbrace{\omega(\underline{\dots w \dots})}_{Б}$

если и А и Б линейно зависимы, то

обе части нулевые

пусть A линейно независим, т.е. образует базис, тогда $w = \lambda u + v$

$\nearrow$ вектор из линейной оболочки отличных от u аргументов из A.

$$\omega(\dots u+w \dots) = \omega(\dots (1+\lambda)u + v \dots) = \omega(\dots (1+\lambda)u \dots) = (1+\lambda)\,\omega(\dots u \dots)$$

$$\omega(\dots w \dots) = \omega(\dots \lambda u + v \dots) = \omega(\dots \lambda u \dots) = \lambda\,\omega(\dots u \dots)$$

$$(1+\lambda)\,\omega(\dots u \dots) = \omega(\dots u \dots) + \lambda\,\omega(\dots u \dots)$$

(4) Знакопеременность

Полилинейная кососимм. форма всегда знакопеременная

$$\omega(\dots u \dots w \dots) = -\omega(\dots w \dots u \dots)$$

кососимм.

$$\omega(\ldots(u+w)\ldots(u+w)\ldots) = 0$$

$$\cancelto{0}{\omega(\ldots u\ldots u\ldots)} + \omega(\ldots u\ldots w\ldots) + \omega(\ldots w\ldots u\ldots) + \cancelto{0}{\omega(\ldots w\ldots w\ldots)}$$

$$\omega(\ldots u\ldots w\ldots) + \omega(\ldots w\ldots u\ldots) = 0$$

если $\operatorname{char} \Bbbk = 2$ кососимметричность строго сильнее, чем знакопеременность.

Факт: Любые две полилинейные кососимметричные формы от n аргументов на n-мерном пр-ве пропорциональны, т.е.

$$\frac{\omega_1(v_1\ldots v_n)}{\omega_2(v_1\ldots v_n)} \text{ не зависит от } v_1,\ldots,v_n$$

Идея доказательства: Выберем базис $e_1, \dots, e_n$ и выразим $\omega(v_1, \dots, v_n)$ $\forall$ $v = e \cdot C = (c_{ij})$ через $\omega(e_1, \dots, e_n)$. $v_j = \sum_{i=1}^{n} e_i c_{ij}$

$$\omega\left(\sum_{i_1=1}^{n} e_{i_1} c_{i_1 1}, \sum_{i_2=1}^{n} e_{i_2} c_{i_2 2}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} e_{i_n} c_{i_n n}\right)$$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_n} \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})} c_{i_1 1} c_{i_2 2} \dots c_{i_n n}$$

0 если есть повторяющиеся

только по перестановкам $(g_1, \dots, g_n)$ множества $(1, \dots, n)$, $g: \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$

$$\omega(e_{g(1)}, \dots, e_{g(n)}) = \omega(e_1, \dots, e_n) \cdot \underset{\substack{\parallel \\ \left[\begin{array}{ll} +1 & g \text{ чётн} \\ -1 & g \text{ нечётн} \end{array}\right.}}{\operatorname{sgn}(g)}$$

$$\omega(v_1,\dots,v_n) = \omega(e_1,\dots,e_n)\cdot$$

$$\cdot\underbrace{\sum_{g\in S_n} \operatorname{sgn}(g)\, c_{g(1)1}\, c_{g(2)2} \cdots c_{g(n)n}}_{\det C}$$

определитель C

зависит от C но не от ω

$$\underline{\omega(v_1,\dots,v_n)} = \underline{\det(C)}\cdot\omega(e_1,\dots,e_n)$$

$$\frac{\omega_1(v_1,\dots,v_n)}{\omega_2(v_1,\dots,v_n)} = \frac{\omega_1(e_1,\dots,e_n)}{\omega_2(e_1,\dots,e_n)}$$