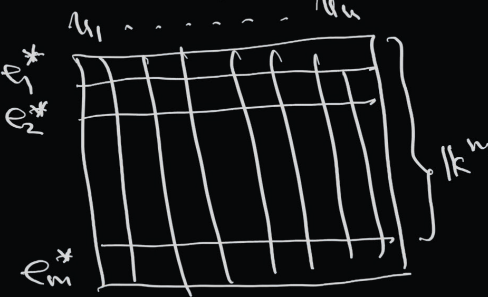
Лекция 18 ноября (вторая половина)

Пример: Теорема о ранге матрицы — это БАНАЛЬНОЕ и совершенно очевидное утверждение!

$U \subset \Bbbk^m$

$U \to \Bbbk$

$\Bbbk^m \to \Bbbk$



Столбцы порождают подпр-во U в $\Bbbk^m$

Строки — это значения базисных ковекторов $e_1^*, \dots, e_m^* \in (\Bbbk^m)^*$ на векторах $u_1, \dots, u_n$

!

Размерность линейной оболочки столбцов $= \mathrm{rk}\, A =$ число элементов в максимальном по включению линейно-независимом наборе столбцов

$$e_1^*\big|_U,\ e_2^*\big|_U, \dots, e_m^*\big|_U$$

линейно порождают U^*

$\dim U^* = \dim U$ - это число элементов в максимальном по включению наборе линейно-независимых функционалов у числе $e_1^*\big|_U, \dots, e_m^*\big|_U$

$\boxed{\dim U = \dim U^*}$ - теорема о ранге матрицы

Немного про линейные

Уравнения

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x \in \Bbbk^n \qquad a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in (\Bbbk^n)^* \qquad \alpha(x) = 0$$

система однородных линейных уравнений = это набор соотношений

$$\alpha_1(v) = 0 \quad \ldots \quad \alpha_m(v) = 0$$

для каких-то $\underline{\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in V^*}$.

Решения такой системы — это $\mathrm{Ann}(W)$ где $W < V^*$ — это подпр-во, порожденное $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$

$$W = \mathrm{span}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) < V^*$$

$M < V^*$ — любое подмножество

$$\underline{\mathrm{Ann}\, M} = \{ v \in V \mid \varphi(v) = 0 \ \forall \varphi \in M \}$$

$\parallel$

решение системы линейных уравнений $\alpha(x) = 0$, где α пробегает M

$N \subset V$ – любое множество векторов

$\mathrm{Ann}\, N \subset V^* = \{\varphi: V \to \Bbbk \mid \varphi(v) = 0 \ \forall v \in N\}$

множество всех линейных функций, зануляющихся на N

Как задать 1-мерное подпр-во в $\Bbbk^3$ уравнениями

$\varphi(x) = 0$

где $\varphi: V \to \Bbbk$
$\ker \varphi$ – подпр-во размерности 2

Рассмотреть сразу все уравнения, которые удовлетво.

$\varphi(x) = 0$

$\lambda \cdot \varphi(x) = 0$

прямая $L < \Bbbk^3$

надо рассмотреть сразу все уравнения, которые её задают!

$\underline{\mathrm{Ann}}\, L = \{\varphi : \Bbbk^3 \to \Bbbk \mid \varphi|_L = 0\}$

Теорема: V - конечномерно, $U < V$ - векторное подпр-во. Тогда $\dim \operatorname{Ann} U = \dim V - \dim U$

Док-во: $\dim U = \dim U^*$

$$U^* = V^* / \operatorname{Ann} U$$

$$\underset{\dim U}{\underset{\|}{\dim U^*}} = \underset{\dim V}{\underset{\|}{\dim V^*}} - \dim \operatorname{Ann} U$$

$$\dim \operatorname{Ann} U = \dim V - \dim U$$

Чтобы задать k-мерное подпр-во в V надо написать $\dim V - k$ мерное ур-во линейных уравнений

Следствие: $\operatorname{Ann} \operatorname{Ann} U = U$

Док-во: $U \subset \operatorname{Ann} \operatorname{Ann} U$

$$\{\varphi \mid \varphi|_U = 0\}$$

$$\downarrow$$

$$U < \{w \mid \varphi(w) = 0 \ \forall \varphi \in \operatorname{Ann} U\}$$

$$\dim \operatorname{Ann}\operatorname{Ann} U = \dim V - \dim \operatorname{Ann} U = \\ = \dim V - (\dim V - \dim U) = \\ = \dim U.$$

$$U \subset \operatorname{Ann}\operatorname{Ann} U \Rightarrow U = \operatorname{Ann}\operatorname{Ann} U$$

Для $W \subset V^*$ получаем $\underline{\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} W = W}$

W – это система линейных уравнений

$\operatorname{Ann} W$ – это решения этой системы уравнений

$\underline{\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} W}$ – это такие линейные функции $\varphi : V \to \mathbb{k}$, которые зануляются на всех решениях системы W.

$$\Downarrow$$

если линейная функция обращается в нуль на мн-ве решений системы линейных однородных уравнений, то она линейно выражается через уравнения системы (!)

Итог: Сопоставление $U \longleftrightarrow \operatorname{Ann} U$

задаёт оборачивающую включения биекцию между k-мерными подпр-вами в V и $(n-k)$-мерными подпр-вами в V^* $(\dim V = n)$.

Эта биекция переводит суммы в пересечения, а пересечения — в суммы

$$\mathrm{Ann}\,(U+W) = \mathrm{Ann}\,U \cap \mathrm{Ann}\,W$$
$$\mathrm{Ann}\,(U\cap W) = \mathrm{Ann}\,U + \mathrm{Ann}\,W$$

$$\begin{tikzcd} k\text{-мерные подпр-ва в } V \arrow[r, bend left, "U \to \mathrm{Ann}\,U"] & n-k\text{-мерные подпр-ва в } V^* \arrow[l, bend left, "\mathrm{Ann}\,W \leftarrow W"] \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Ann}\,\mathrm{Ann}\,U = U \Leftrightarrow$ эти отображения обратны друг другу (в частности биективны)

$$U < W \Longrightarrow \mathrm{Ann}\,U \supset \mathrm{Ann}\,W$$
$$\Longleftarrow$$

$$\mathrm{Ann}\,U < \mathrm{Ann}\,W \Rightarrow \underset{\underset{U}{\shortparallel}}{\mathrm{Ann}\,\mathrm{Ann}\,U} \supset \underset{\shortparallel}{\mathrm{Ann}\,\mathrm{Ann}\,W}$$

W

$$\operatorname{Ann}(U+W)=\operatorname{Ann}(U)\cap\operatorname{Ann}(W)$$

очевидно.

$$\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann}U+\operatorname{Ann}W)=\operatorname{Ann}\operatorname{Ann}U\cap$$

$$\cap\operatorname{Ann}\operatorname{Ann}W$$

$$\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann}U+\operatorname{Ann}W)=U\cap W$$

$$\downarrow \operatorname{Ann}$$

$$\operatorname{Ann}U+\operatorname{Ann}W=\operatorname{Ann}(U\cap W)$$

Теорема доказана!

Дистрибутивные решётки