# Лекция 18 ноября (первая половина)

$V$ - векторное пр-во, двойственное пр-во $V^* = \{\varphi: V \to \mathbb{k} \mid \varphi$ - линейно$\}$

$\exists$ каноническое вложение $V \hookrightarrow V^{**} = (V^*)^*$

линейные функции на $V^*$

$$\underline{ev}: V \hookrightarrow V^{**}$$

$$v \longmapsto \left(ev_v : V^* \to \mathbb{k},\ \varphi \longmapsto \varphi(v)\right)$$

Элементы из $V^*$ наз. ковекторами или линейными функционалами, линейными формами.

---

$\forall$ множеств $X$ имеется вложение

$ev: X \longrightarrow \mathbb{k}^{(\mathbb{k}^X)}$ = функции $\mathbb{k}^X \to \mathbb{k}$

со структурой в $\mathbb{k}^X \supset \mathcal{O}_X$ - регулярные функции

Геометричность структуры и понятия регулярности измеряется тем, насколько вкупе $X$ совпадает с регулярными функциями на $\mathbb{k}^X$.

Для конечномерных векторных пространств («регулярность» = линейность) совпадение полное, т.е. $V \xrightarrow{\sim} V^{**}$

$$ev : V \hookrightarrow V^{**}$$

Достаточно проверить, что $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$.

Пусть в $V$ выбран базис $e_1, \dots, e_n$

Тогда координаты относительно этого базиса — это элементы из $V^*$

$$\boxed{e_i^*(v) = \text{i-тую координату вектора } v \text{ в базисе } e_1, \dots, e_n}$$

Матрица $e_i^*$ в базисе $e$ — это строка $\boxed{0 \dots 0 \,|\, \underset{i}{1} \,|\, 0 \dots 0}$ $\qquad \underset{\overset{\uparrow}{V^*}}{\underline{e_i^* : V \to \Bbbk}}$

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} := \underset{\uparrow}{\delta_{ij}}$$

$e_1^*, \dots, e_n^*$ - базис в $V^*$   δ-символ Кронекера

(он называется двойственным к базису $e_1, \dots, e_n$).

Как выразить произвольную форму $\varphi : V \to \Bbbk$ через $e_1^*, \dots, e_n^*$?

$$\forall v \quad \varphi(v) = \lambda_1 e_1^*(v) + \dots + \lambda_n e_n^*(v)$$

чему равны $\lambda_1, \dots, \lambda_n$?

$$\boxed{\lambda_i = \varphi(e_i)} \; !$$

$$v = e_1 x_1 + e_2 x_2 + \dots + e_n x_n$$

$$\varphi(v) = \varphi(e_1) \cdot x_1 + \varphi(e_2) x_2 + \dots + \varphi(e_n) x_n$$

$$= \varphi(e_1) e_1^*(v) + \varphi(e_2) \cdot e_2^*(v) + \dots + \varphi(e_n) e_n^*(v)$$

$e_1^*, \dots, e_n^*$ линейно порождают $V^*$.

Линейная независимость: пусть

$$\lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_n e_n^* = 0 \text{ в } V^*$$

$\Big\downarrow$ вычислить эту функцию $\boxed{V \to \Bbbk}$ на базисном векторе $e_j$

$$\lambda_j = 0 \quad \forall j.$$

Двойственные базисы в $V$ и $V^*$ — это такие наборы векторов $v_1, \dots, v_n$ и ковекторов $\xi_1, \dots, \xi_n$, что $\langle \xi_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j \\ 1, & \text{при } i = j. \end{cases}$$

$\langle \xi_i, v_j \rangle =$ симм. обозначение для $\xi_i(v_j) = ev_{v_j}(\xi_i)$

$$\boxed{V^{**} = V}$$

$$v : V^* \longrightarrow \Bbbk \quad \xi \mapsto \xi(v)$$

Пример: $V = \Bbbk[x]_{\leq n}$ $\qquad V^*$

многочлены степени $\leq n$

Зафиксируем $\alpha \in \Bbbk$, $\operatorname{char} \Bbbk = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \xi_0(f) &= f(\alpha) \\ \xi_1(f) &= f'(\alpha) \\ \xi_2(f) &= f''(\alpha) \\ \xi_n(f) &= f^{(n)}(\alpha) \end{aligned}}$$

$$f : V^* \longrightarrow \Bbbk$$
$$\varphi \longmapsto \varphi(f)$$

$$V \subset V^{**}$$

$\varphi \in V^*$ $f \in V$

$\varphi : V \longrightarrow \Bbbk$

$\xi_i : \Bbbk[x]_{\leq n} \longrightarrow \Bbbk$ $\xi_i \in V^*$ $\forall$

ксн нсн

- Можно ли указать такие многочлены $f_0, f_1, \dots, f_n$, чтобы $\xi_i(f_j) = \delta_{ij}$ ?

$$f_j(x) = \frac{(x-\alpha)^j}{j!}$$

$i > j$ $0$

$i < j$ $\vdots (x-\alpha)$

$1$

$$\boxed{f_j^{(i)}(\alpha) = \delta_{ij}}$$ проверить!

---

$\xi_i$ и $f_i$ – это двойственные базисы

т.е. (1) $f_0, \dots, f_n$ – это базис в $\Bbbk[x]_{\leq n}$

$\varphi_1 \dots \varphi_m \in V^*$

$v_1 \dots v_m \in V$

(2) $\xi_i(g)$ – это $i$-тая координата $g$ в этом базисе.

$\Downarrow$

$\forall\, g \in \Bbbk[x]_{\leq n}$ выполнено точное равенство:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} g^{(k)}(\alpha)\,\frac{(x-\alpha)^k}{k!}$$

$\Downarrow$ $\dim V = n$

это двойственные базисы, т.е.

(1) и $\varphi$ и $\upsilon$ – это базисы

(2) $\varphi_i$ – это $i$-тая координата в базисе $\upsilon$, а $\upsilon_i$ – это $i$-тая координата в базисе $\varphi$.

---

$\forall$ набор чисел $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ $\exists!$ многочлен $g \in \Bbbk[x]_{\leq n}$ : $g^{(k)}(\alpha) = \lambda_k$.

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{(x-\alpha)^k}{k!}$$

---

$V$ и $V^*$ – двойственные конечномерные пр-ва

Дано $U \subseteq V$ что можно сказать про $U^*$?

**Факт:** $U^* \simeq V^*/\mathrm{Ann}\,U$

$$\mathrm{Ann}\,U = \{\varphi : V \to \mathbb{k} \mid \varphi|_U \equiv 0\}$$

$U < \ker\varphi$

линейные функции $U \to \mathbb{k}$

$\|$

линейные функции $V \to \mathbb{k}$, по модулю тех функций, что зануляются на $U$.

**Эпиморфно!**

**Док-во:** $\pi : V^* \longrightarrow U^*$

$$(\varphi : V \to \mathbb{k}) \longmapsto (\varphi|_U : U \to \mathbb{k}).$$

линейное отображение.

$$\ker(\pi) = \{\varphi : V \to \mathbb{k} \mid \varphi|_U \equiv 0\}$$

$\|$

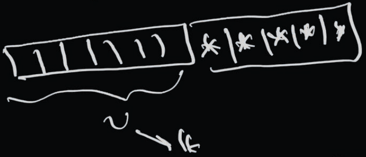
$\mathrm{Ann}\,U$ аннулятор $U$.

$\mathrm{im}(\pi) = U^*$ любая линейная

функция $U \xrightarrow{\varphi} \Bbbk$ является ограничением некоторой? $\tilde{\varphi}: V \to \Bbbk$

$\tilde{\varphi}|_U = \varphi$

выбрать в $U$ базис $u_1, \ldots, u_k$
дополнить его до базиса $u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_m$
в $V$ и задать $\tilde{\varphi}$ правилом
$\tilde{\varphi}(u_i) = \varphi(u_i)$ $\quad \tilde{\varphi}(w_i) = \lambda_i \leftarrow$ любое число



$$\pi: V^* \twoheadrightarrow U^* \qquad \ker \pi = \mathrm{Ann}(U)$$

$$\mathrm{im}(\pi) = U^* \simeq V^*/\ker \pi = V^*/\mathrm{Ann}\, U$$

$$\mathrm{Ann}\, U \subset V^*$$

$$\boxed{V^*/\mathrm{Ann}\, U = U^*}$$

$$\varphi: V \to \Bbbk$$

$$[\varphi]_{\operatorname{Ann} U} \longmapsto \varphi|_U$$

корректно определено и биективно отображение

---

Эпиморфно = сюръективно = "НА"

у каждого элемента есть прообраз.