# лекция 5 ноября (первая половина)

$A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk) \rightsquigarrow$ линейное отображение

$$F_A : \Bbbk^n \longrightarrow \Bbbk^m$$

$$x \longmapsto Ax$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ранг $A$ $\quad \mathrm{rk}(A) \overset{\mathrm{def}}{=}$

$= \dim \operatorname{im} F_A =$

$=$ размерность линейной оболочки столбцов матрицы $A$.

Проверим: $\mathrm{rk}\, BAC = \mathrm{rk}\, A$

$\forall$ обратимых $B$ и $C$

$$\left.\begin{array}{l} C \in GL_n(\Bbbk) \\ B \in GL_m(\Bbbk) \end{array}\right\} \leftarrow$$ группы обратимых матриц.

---

Следствие: Размерность линейной оболочки строк матрицы $A$ тоже не меняется при умножении слева и справа на обратимые матрицы.

$A$ $\quad$ $BAC$

их строки = столбцы у

$A^t$ $\quad$ $C^t A^t B^t$

$\mathrm{rk}\, A^t = \mathrm{rk}\, C^t A^t B^t$

$\Downarrow$

лин. оболочки строк у $A$ и $BAC$ имеют равные размерности.

---

Теорема о ранге матрицы $\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, A^t$

линейная оболочка столбцов в $\Bbbk^n$ имеет ту же размерность, что линейная оболочка строк в $\Bbbk^n$

---

Док-во: $\quad F_A : \Bbbk^n \longrightarrow \Bbbk^m$

Выберем в $\Bbbk^n$ такой базис $\quad \dim \ker F_A = n-r$

$$\{h_1, \dots, h_r, \underbrace{h_{r+1}, \dots, h_n}_{\text{базис в } \ker F_A}\}$$

Тогда $\underset{w_1}{\underset{\shortparallel}{F_A(h_1)}}, \dots, \underset{w_r}{\underset{\shortparallel}{F_A(h_r)}}$ - это базис в $\operatorname{im} F_A$

дополним эти вектора до базиса

$(w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m)$

во всем $\Bbbk^m$

Как устроена матрица $F_A$ в базисах $h$ и $w$?

$$(F_A)_{wh} = \left.\begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \\ & & \cdots & 1 \end{matrix} & 0 \\ \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \ \ \ 0 \ \ \ \end{matrix}}_{r} & \end{pmatrix}\right\} m$$

$$\overset{n}{\longleftrightarrow}$$

в ПВУ стоит единичная матрица $r \times r$

размерность пр-ва строк = размерности пр-ва столбцов

$$(F_A)_{wh} = C_{wg} \underset{(F_A)_{ge}}{\underset{\shortparallel}{A}} C_{eh}$$

$e = (e_1 \dots e_n)$

$g = (g_1 \dots g_m)$ - стандартные базисы в $\Bbbk^n$ и $\Bbbk^m$

$$A = \underbrace{C_{gw}}_{} (F_A)_{wh} \underbrace{C_{he}}_{}$$

обратимые

у $A$ линейные оболочки строк и столбцов тоже имеют равные размерности.

## Матричная запись систем Л.У.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

С.Л.У
из $m$
уравнений
на $n$
неизвестных

$a_{ij}$ и $b_i$ даны

$x_1, \dots, x_n$ надо найти.

$$\boxed{Ax = b}$$

$$A = (a_{ij})$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Решения — это такие $x \in \mathbb{k}^n$, что

$$F_A(x) = b$$

Решения образуют аффинное подмн-во в $\mathbb{k}^n$ — прообраз вектора $b$ при линейном отображении $F_A : \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^m$, $x \to Ax$

$$F_A^{-1}(b) = \left[\begin{array}{l} \emptyset\text{, если } b \notin \operatorname{im} A \\ p + \ker F_A\text{, если } \underline{\underline{b = F_A(p)}} \end{array}\right.$$

$\nearrow$ какая-то точка из $F^{-1}(b)$

$$\ker F_A = \{ x \mid Ax = 0 \}$$

$\nearrow$ однородное уравнение

Альтернатива Фредгольма:

либо у системы $Ax = b$ при любом $b$ есть не более одного решения, либо у системы $Ax = 0$ есть ненулевое решение.

- Если множество решений не пусто, то это аффинное пр-во размерности $\underline{\underline{n - \operatorname{rk} A}}$.

$$\overset{\shortparallel}{\dim \ker F_A}$$
$$\overset{\shortparallel}{n - \dim \operatorname{im} F_A}$$

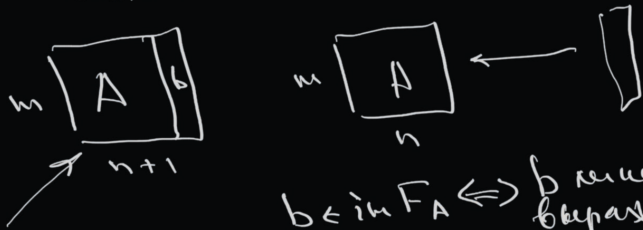
• Система $Ax=b$ имеет решение $\iff$

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right)$$

матрица системы

расширенная матрица системы

« Критерий »
Кронеккера –
Капелли



$b \in \operatorname{im} F_A \iff b$ линейно выражается через столбцы $A$

---

## Уточнение для квадратных систем

$$A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{k})$$

(число уравнений равно числу неизвестных)

$$\ker F_A = 0 \iff \operatorname{im} F_A = \mathbb{k}^n$$

Альтернатива Фредгольма: либо у уравнений $Ax=0$ есть ненулевое
либо у системы $Ax=b$

решение,

при любом $b$ есть ровно одно решение.

---

$Ax=0$ число уравнений < число неизвестных

$F_A : \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^m$, $m<n$

$\Downarrow$

$\ker F_A \neq 0 \Rightarrow Ax=0$ имеет ненулевые решения

---

## Метод Гаусса

Пусть подпр-во $U \subset \mathbb{k}^n$ задано как линейная оболочка набора векторов $u_1, \dots, u_m$

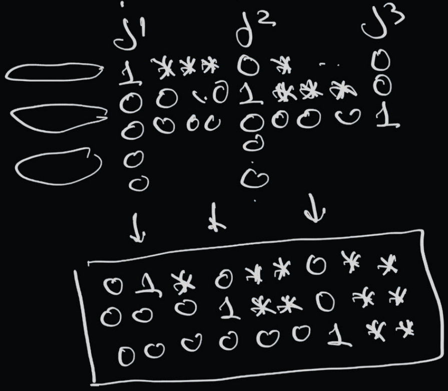
- Как найти $\dim U$ и указать в $U$ какой-нибудь базис?

$$\begin{matrix} u_1 = (a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n}) \\ u_2 = (a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n}) \\ \dots \\ u_m = (a_{m1}\ a_{m2} \dots a_{mn}) \end{matrix} \qquad A$$

Метод Гаусса преобразует $A$ в т.н. приведённую ступенчатую матрицу $A_{red}$ так, что линейная оболочка строк не меняется.

Матрица наз. приведённой ступенчатой, если

- самый левый $\neq 0$ элемент каждой строки равен 1 $\quad 0 \dots 0\,1 * * *$
- он находится строго правее, чем в предыдущей строке $\quad \begin{matrix} 0 \dots 0\,1 * \dots \\ 0\ 0\,0\,1 \dots 0\,1 \end{matrix}$
- он является единственным $\neq 0$ элементом своего столбца.



столбцы, содержащие самые левые ненулевые элементы строк называются базисными. Их номера $j^1, \dots, j^2$ строго возрастают и в них стоит единичная матрица размера $r \times r$.

---

В чём метод состоит:

пару строк матрицы $A$ заменить на линейные комбинации:

$$\begin{matrix} u \\ w \end{matrix} \longmapsto \underline{\begin{matrix} u' = \alpha u + \beta w \\ w' = \gamma u + \delta w \end{matrix}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$$

так, чтобы линейная оболочка не поменялась. Это равносильно тому, что матрица $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ обратима

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}}$$

решается

$\Updownarrow$

$\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$$

$\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}}$$