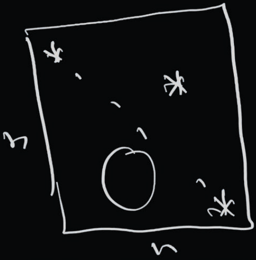
! Важная народно-хозяйственная задача: искать обратные матрицы.

Пример!



Верхне-треугольные $\in \mathrm{Mat}_n$

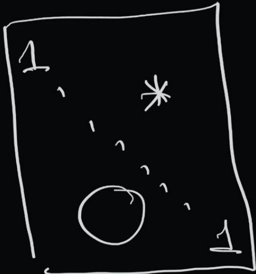
$$\begin{cases} a_{ij}=0 \\ \text{при } i>j \end{cases}$$

Задача на дом:

Показать что такие матрицы образуют подалгебру в Mat_n!

Унитреугольные:

$$\begin{cases} a_{ij}=0 \text{ при } i>j \\ a_{ii}=1. \end{cases}$$



Факт: Унитреугольная матрица с элементами из любого ассоциатив. кольца (пусть даже некоммутативного!) всегда обратима.

$$E_{ij} = i\begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & \boxed{1} & \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}_{\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\underset{\displaystyle j}{\vdots}}$$

$$E_{ij} \cdot E_{kl} = \begin{cases} E_{il} & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k. \end{cases}$$

очевидно

Это матрица оператора

$$E_{ij} : \Bbbk^n \longrightarrow \Bbbk^n : e_k \longmapsto \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq j \\ e_i, & \text{если } k = j \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \ddots & a_{ij} \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (1 + N)^{-1}$$

N — нильпотентна

Элемент N кольца наз. нильпотентным, если $\exists m$: $N^m = 0$

$$N = \sum_{j > i} a_{ij} E_{ij}$$

нильпотентна

$$N^m = \left(\sum_{j>i} a_{ij}E_{ij}\right)\left(\sum_{j>i} a_{ij}E_{ij}\right)\dots\left(\sum_{j>i} a_{ij}E_{ij}\right)$$

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} E_{il}, & j=k \\ 0, & j\neq k \end{cases}$$

$$i \xleftarrow{E_{ij}} j$$

$$E_{k\nu_{m-1}} E_{\nu_{m-1}\nu_{m-2}} \dots E_{\nu_3\nu_2} E_{\nu_2\nu_1} E_{\nu_1 l}$$

$$\overbrace{k \leftarrow \nu_{m-1} \dots \leftarrow \nu_2 \leftarrow \nu_1 \leftarrow}^{m\ \text{отрезок}} l$$

$$N^m = \sum_{l-k\geq m} E_{kl} \cdot \sum_{k<\nu_{m-1}<\dots<\nu_1<l} a_{k\nu_{m-1}} a_{\nu_{m-1}\nu_{m-2}} \dots a_{\nu_2\nu_1} a_{\nu_1 l}$$

произведение чисел $a_{\nu_i\nu_{i-1}}$
по всем способам пройти
из l в k за m шагов.

$N^m = 0$ при $m >$ (размер матрицы) $- 1$

$$(E+N)^{-1} = E - N + N^2 - N^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

подставив $x = N$

$$\begin{pmatrix} 1 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = E + \sum_{k \geq 1} (-1)^k \underset{\uparrow}{\sum} a_{i v_{k-1}} \dots a_{v_1 j} \, E_{ij}$$

по всем способам пройти из j в i k шагов

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & \overset{\text{за}}{-b+ac} \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ⑬$$

$a_{13} - a_{12}a_{23}$

Элемент (ij) матрицы $\begin{pmatrix} 1 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

равен $\displaystyle\sum_k (-1)^k \underset{\uparrow}{\sum} a_{i v_1} \dots a_{v_{k-1} j}$

сумма по всем способам пройти из j в i за k шагов.

Рассмотрим $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{k})$.

Факт: Такая матрица обратима $\Leftrightarrow$ когда её строки образуют базис в $\mathbb{k}^n$ $\Leftrightarrow$ её столбцы образуют базис в $\mathbb{k}^n$.

Про столбцы:

$$\begin{array}{c} C=(\overset{\text{столбцы}}{\overset{\swarrow}{c_1}},\dots,c_n) \\ \shortparallel \\ C_{ec} \end{array}$$

$$(c_1,\dots,c_n)=(e_1,\dots,e_n)\cdot C$$

$$\exists C^{-1}\Rightarrow\quad(e_1,\dots,e_n)=(c_1,\dots,c_n)\cdot C^{-1}$$

$c_1,\dots,c_n$ — порождают $\mathbb{k}^n \Rightarrow$ базис.

если $c_1,\dots,c_n$ — базис $\Rightarrow \exists\, C_{ce}: e=c\cdot C_{ce}$

$$C_{ce}\cdot \underset{\overset{\shortparallel}{C}}{C_{ec}}=E=\underset{\overset{\shortparallel}{C}}{C_{ec}}\cdot C_{ce}$$

$$C_{ce}=C^{-1}$$

Следствие: Обратимость матрицы равносильна любому из условий:

- строки порождают $\mathbb{K}^n$
- строки линейно независимы
- столбцы порождают $\mathbb{K}^n$
- столбцы линейно независимы.

Как доказать утверждение про строки?

$A \longrightarrow A^t$ столбцы превращает в строки.

A - обратима $\Longleftrightarrow$ A^t обратима

$\exists B: \; AB = E = BA$

$A^t B^t = (BA)^t = E$

$B^t A^t = (AB)^t = E$

$E^t = E$

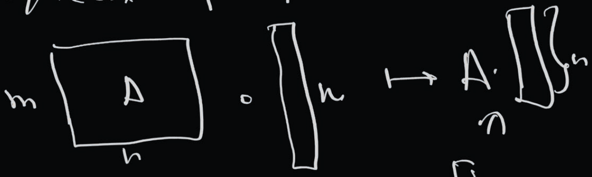
$$\boxed{(AB)^t = B^t \cdot A^t}$$

Теорема о ранге

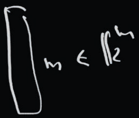
Всякая $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{k})$ — это матрица линейного отображения

$$F_A : \mathbb{k}^n \longrightarrow \mathbb{k}^m$$
$$x \longmapsto Ax$$

A — это в точности матрица оператора F_A в стандартных базисах пространств $\mathbb{k}^n$ и $\mathbb{k}^m$

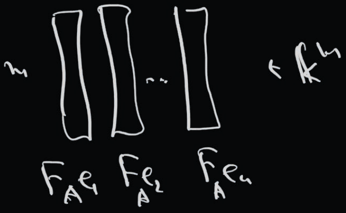


RK
ранг



$\mathrm{rk}\, A = \dim \mathrm{im}\, F_A =$

= размерность линейной оболочки столбцов матрицы A



Замечание: rk A не меньше

при умножении A слева и справа на обратимые матрицы

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(B \cdot A \cdot C)$$

$$\forall B \in GL_m(\Bbbk) \leftarrow$$

обратимые матрицы размера $m \times m$

$$\forall C \in GL_n(\Bbbk) \leftarrow$$

" —— "
$n \times n$

$$\Bbbk^n \xrightarrow[\sim]{F_C} \Bbbk^n \xrightarrow{F_A} \Bbbk^m \xrightarrow[\sim]{F_B} \Bbbk^m$$

$$\dim \operatorname{im}(F_B F_A F_c) = \dim \operatorname{im} F_A$$

$$\ker\left(F_B\big|_{\operatorname{im} F_A}\right) = 0$$

$$\underline{\dim\left(\operatorname{im} F_B\big|_{\operatorname{im} F_A}\right)} = \dim \operatorname{im} F_A$$

$$\operatorname{im}(F_A \circ F_c) = \operatorname{im}(F_A)$$

Теорема о ранге: $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^t$

Строки матрицы A порождают в $\mathbb{K}^n$ пр-во той? же размерности, что и столбцы в $\mathbb{K}^m$.

! Подумать, как это увидеть.

AB

j-ый столбец произведения = линейная комбинация столбцов A с к-тами из j-того столбца B

$(AB)^t = B^t \cdot A^t \Leftarrow$

i-тая строка = ?

$$(a_1 \ldots a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \overset{def}{=} \sum a_i b_i$$