Аффинные и проективные квадрики

Терминология. Пусть аффинная квадрика $Q \subset \mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ задаётся неоднородным квадратичным уравнением $b_2(x_1, \dots, x_n) + b_1(x_1, \dots, x_n) + b_0 = 0$, где

$$b_2(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} x_i x_j \in S^2 V^*, \quad b_1(x_1, \dots, x_n) = 2 \sum_{j=1}^{n} \beta_{0j} x_j \in V^*, \quad b_0 = \beta_{00} \in \Bbbk.$$

Положим $W = \Bbbk \cdot e_0 \oplus V$, $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$, отождествим $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ со стандартной аффинной картой $U_0 \subset \mathbb{P}_n$ и обозначим через $L_\infty = \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}_n \smallsetminus U_0$ бесконечно удалённую гиперплоскость $x_0 = 0$. Проективное замыкание $\overline{Q} \subset \mathbb{P}_n$ имеет в базисе $e_0, e_1, \dots, e_n$ матрицу Грама $B = \left(\beta_{ij}\right)$ с $0 \leqslant i, j \leqslant n$, которая называется *расширенной* матрицей Грама аффинной квадрики Q. Пересечение $Q_\infty = \overline{Q} \cap L_\infty$ имеет в базисе $e_1, \dots, e_n$ матрицу Грама $B_\infty = \left(\beta_{ij}\right)$ с $1 \leqslant i, j \leqslant n$, которая называется *асимптотической* матрицей Грама аффинной квадрики Q. Аффинная квадрика Q называется *гладкой центральной*, если обе квадрики $\overline{Q}$, Q_∞ гладкие[1], *параболоидом* — если $\overline{Q}$ гладкая, а Q_∞ особая[2], (*простым*) *конусом* — если $\overline{Q}$ особая, а Q_∞ гладкая[3], *цилиндром* — если обе квадрики $\overline{Q}$, Q_∞ особы[4]. Гладкая вещественная центральная аффинная квадрика Q называется *эллипсоидом*, если $Q_\infty = \varnothing$, и *гиперболоидом*, если $Q_\infty \neq \varnothing$.

Через $Q_{n,m} \subset \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ обозначается гладкая вещественная проективная квадрика размерности n и планарности[5] $-1 \leqslant m \leqslant n/2$. Всякая гладкая вещественная проективная квадрика проективно конгруэнтна одной и только одной квадрике $Q_{n,m}$.

Невырожденная вещественная аффинная квадрика[6] Q с точностью до аффинной конгруэнтности определяется классами проективной конгруэнтности квадрик $\overline{Q}$ и Q_∞, причём если $\overline{Q} = Q_{nm}$, то либо $Q_\infty = Q_{n-1,m}$, либо $Q_\infty = Q_{n-1,m-1}$, либо Q_∞ является простым конусом над $Q_{n-2,m-1}$. Последнее равносильно тому, что аффинная квадрика Q является параболоидом.

Вещественный аффинный конус Q с точностью до аффинной конгруэнтности определяется классом проективной конгруэнтности своей асимптотической квадрики Q_∞.

Всякий цилиндр $Q \subset \mathbb{R}^n$ является прямым произведением аффинного подпространства $\mathbb{R}^s \subset \mathbb{R}^n$, проективизацией пространства направлений которого служит[7] $L_\infty \cap \operatorname{Sing} \overline{Q}$, и нецилиндрической аффинной квадрики Q_{red} в трансверсальном к $\mathbb{R}^s$ аффинном подпространстве $\mathbb{R}^{n-s} \subset \mathbb{R}^n$.

ГС20◇1. Покажите, что у гладкой проективной квадрики $Q_{n,m} = V(q) \subset \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ планарность m, размерность n и абсолютная величина индекса[8] ι квадратичной формы q связаны соотношением $2m + \iota = n$, и найдите ранг и планарность следующих вещественных

[1] В этом случае полюс $z_* = \left(B_{0,0} : -B_{0,1} : \dots : (-1)^n B_{0,n}\right)$ гиперплоскости L_∞ лежит в $\mathbb{A}^n$ и является центром симметрии аффинной квадрики Q.

[2] В этом случае гиперплоскость L_∞ касается квадрики $\overline{Q}$ в точке $x_* = \left(0 : -B_{0,1} : \dots : (-1)^{n+1} B_{0,n}\right)$, которая одновременно является полюсом гиперплоскости $x_0 = 0$ и одномерным ядром формы B_∞.

[3] В этом случае квадрика $\overline{Q}$ имеет единственную особую точку $z_* \in \mathbb{A}^n$ и является простым конусом с вершиной в этой точке над гладкой асимптотической квадрикой $Q_\infty \subset L_\infty$.

[4] В этом случае $Q = \mathbb{A}^s \times Q'$, где аффинное пространство $\mathbb{A}^s \subset \mathbb{A}^n$ имеет направляющим пространством векторное подпространство $U = \ker B \cap V$, а Q' — нецилиндрическая квадрика, лежащая в произвольном трансверсальном к U аффинном подпространстве $\mathbb{A}^{n-s} \subset \mathbb{A}^n$.

[5] Напомню, что *планарностью* проективной квадрики называется максимум m размерностей лежащих на этой квадрике проективных подпространств. Значение $m = -1$ равносильно пустоте квадрики.

[6] Т. е. гладкая центральная квадрика или параболоид.

[7] В частности, $s = 1 + \dim L_\infty \cap \operatorname{Sing} \overline{Q}$.

[8] Т. е. модуль разности между положительным и отрицательным индексами инерции.

двумерных проективных квадрик в $\mathbb{P}_3$:

а) $-5x_0^2-8x_0x_1+16x_0x_2+2x_0x_3+x_1^2+18x_1x_2-8x_1x_3-11x_2^2-10x_2x_3+6x_3^2=0$

б) $8x_0^2-14x_0x_1+6x_0x_2-22x_0x_3+5x_1^2+2x_1x_2+22x_1x_3-10x_2^2-18x_2x_3+14x_3^2=0$

в) $-3x_0^2+2x_0x_1-12x_0x_2+20x_0x_3-6x_1^2-4x_1x_2+22x_1x_3-15x_2^2+60x_2x_3-70x_3^2=0$

г) $-2x_0^2+14x_0x_1+6x_0x_2-4x_0x_3-24x_1^2-20x_1x_2+12x_1x_3-4x_2^2+4x_2x_3-x_3^2=0$

д) $-4x_0^2-12x_0x_1+24x_0x_2+4x_0x_3-8x_1^2+34x_1x_2+8x_1x_3-35x_2^2-14x_2x_3=0$.

ГС20⋄2. Перечислите все 7 непустых вещественных «кривых второй степени» в $\mathbb{R}^2$ и все 14 непустых вещественных «поверхностей второй степени» в $\mathbb{R}^3$ с точностью до аффинной конгруэнтности. Для каждого типа напишите по возможности самый простой пример аффинного уравнения, задающего квадрику этого типа.

ГС20⋄3. Определите, к какому из четырнадцати типов относится аффинная поверхность, заданная в стандартных координатах на $\mathbb{R}^3$ уравнением:

а) $3x^2-14xy+8xz-12x+17y^2-18yz+28y+6z^2-16z+11=0$

б) $-x^2+2xy+10xz+4x+4y^2-34yz-10y+4z^2-6z-3=0$

в) $-x^2+6xy-8xz+2x-7y^2+18yz-11z^2-2z+5=0$

г) $2x^2-8xy-2xz+2x+8y^2+4yz-2y+z^2+7=0$

д) $x^2-4xy-2xz-4x+6y+4z+7=0$

е) $2x^2-2xz+2x+3y^2-10yz-2y+9z^2+9=0$

ж) $x^2+4xy-4x+4y^2-2yz-8y-4z^2+2z+4=0$

з) $2y^2-6yz-2y+5z^2+6z+4=0$

и) $x^2-4xy-2xz+2x+3y^2+6yz-6z-4=0$

к) $-x^2-2xy-2xz+6x-y^2-2yz+4y-z^2+6z=0$

л) $x^2-4xy-2xz-4x+5y^2+6y+5z^2+8z+5=0$

м) $2xz-2yz-3z^2+4z=0$

н) $x^2-2xy-2x+y^2+2y=0$

о) $y^2-2yz+2y+z^2-2z+1=0$.

Для гладких центральных поверхностей найдите центр, для парабол — направление оси, для конусов — вершину, для цилиндров — образующее векторное пространство, а также тип и размерность квадрики, служащей основанием цилиндра.

ГС20⋄4. Перечислите все **а)** компактные **б)** несвязные аффинные квадрики в $\mathbb{R}^3$.

ГС20⋄5. Покажите, что[9]: **а)** любой параболоид в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфен $\mathbb{R}^{n-1}$

б) любой эллипсоид $Q\subset\mathbb{R}^n$ 0-планарен и гомеоморфен сфере[10] S^{n-1}

в) 0-планарная проективная квадрика $Q_{n,0}\subset\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ гомеоморфна сфере[11] S^n

г) 0-планарный гиперболоид $Q\subset\mathbb{R}^n$ гомеоморфен[12] $\mathbb{R}^{n-1}\times S^0=\mathbb{R}^{n-1}\sqcup\mathbb{R}^{n-1}$

д) однополостный гиперболоид $1+z^2=x^2+y^2$ в $\mathbb{R}^3$ гомеоморфен $\mathbb{R}^1\times S^1$.

ГС20⋄6. Покажите, что всякая непустая центральная гладкая аффинная вещественная квадрика гомеоморфна $\mathbb{R}^k\times S^\ell$, и объясните, как связаны числа k и ℓ с сигнатурами матриц Грама B и B_∞.

ГС20⋄7. Покажите, что гладкие 0-планарная и 1-планарная квадрики в $\mathbb{P}_3$ над полем $\mathbb{F}_q$ состоят, соответственно, из q^2+1 и $(q+1)^2$ точек, и подсчитайте число решений уравнений из зад. ГС20⋄1 над полями $\mathbb{F}_5$, $\mathbb{F}_7$, $\mathbb{F}_{11}$ и $\mathbb{F}_{13}$.

ГС20⋄8. Из скольких точек состоят над теми же полями аффинные квадрики из зад. ГС20⋄3?

ГС20⋄9. Две различные гладкие квадратичные поверхности планарности 1 в $\mathbb{P}_3$ имеют общую прямолинейную образующую. Покажите, что помимо неё они пересекаются ещё по двум (возможно, совпадающим) прямым из другого семейства образующих.

---

[9] Если общий случай вызывает затруднения, сделайте эту задачу для $n=3$.

[10] В частности, компактен.

[11] Подсказка: спроектируйте квадрику из лежащей на ней точки на проективную гиперплоскость и сравните результат со стереографической проекцией сферы на аффинную гиперплоскость.

[12] В частности, имеет две связные компоненты.