

Евклидовы коники

Терминология. Рассмотрим евклидову плоскость $V = \mathbb{R}^2$ со стандартными координатами (x_1, x_2) как множество вещественных точек комплексного координатного пространства $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$, которое вложим в качестве аффинной карты U_0 в комплексную проективную плоскость $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$. Прямая $x_0 = 0$ на \mathbb{P}_2 называется *бесконечностью* и обозначается $\ell_{\infty} = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$. Точки $\iota_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} (\pm i : 1) \in \ell_{\infty}$, из которых состоит евклидова коника $x_1^2 + x_2^2 = 0$, называются *изотропными направлениями*. На ℓ_{∞} имеется инволюция *перпендикулярности*¹ (её неподвижные точки — изотропные направления). Коника на \mathbb{P}_2 называется *вещественной*, если её уравнение в координатах $(x_0 : x_1 : x_2)$ имеет вещественные коэффициенты. Гладкая вещественная коника называется, соответственно, *параболой*, *гиперболой*, *эллипсом*, если она касается бесконечности ℓ_{∞} или пересекает её по двум вещественным или двум комплексно сопряжённым точкам. Точки пересечения $C \cap \ell_{\infty}$ называются *асимптотическими направлениями* коники C . Точка $f \in \mathbb{P}_2$ называется *фокусом* гладкой вещественной коники $C \subset \mathbb{P}_2$, если прямые $(f \iota_{\pm})$ касаются C . Поляры фокусов называются *директрисами*. Полюс z_* бесконечно удалённой прямой ℓ_{∞} называется *центром* коники. Прямые, проходящие через центр, называются *диаметрами*. Гладкие коники C с конечным центром (гиперболы и эллипсы) называются *центральнойми*. Такая коника C задаёт на прямой ℓ_{∞} инволюцию *сопряжённости коникой C* (её неподвижные точки — асимптотические направления). Два одновременно сопряжённых и перпендикулярных друг другу диаметра называются *главными осями* гладкой центральной коники.

- ГС19♦1.** Покажите, что перпендикулярность вещественных векторов $u, w \in \ell_{\infty}$ равносильна
- а) их сопряжённости относительно евклидовой коники $x_1^2 + x_2^2 = 0$
 - б) гармоничности их направлений с изотропными направлениями ι_{\pm} .

ГС19♦2. Убедитесь, что центральная коника C имеет четыре фокуса, два из которых (назовём их f_1, f_2) вещественны, а два других (назовём их f_3, f_4) не вещественны и комплексно сопряжены, причём прямые $(f_1 f_2)$ и $(f_3 f_4)$ пересекаются в центре z_* коники и пересекают бесконечность ℓ_{∞} по вещественным точкам x_* и y_* , задающим направления главных осей коники C . Кроме того, точки x_* и y_* являются полюсами фокальных прямых $(f_3 f_4)$ и $(f_1 f_2)$ соответственно, а треугольник $\Delta x_* y_* z_*$ автополярен относительно C , см. рис. 1♦1. Верно ли, что поляры изотропных точек ι_{\pm} тоже пересекаются в центре коники?

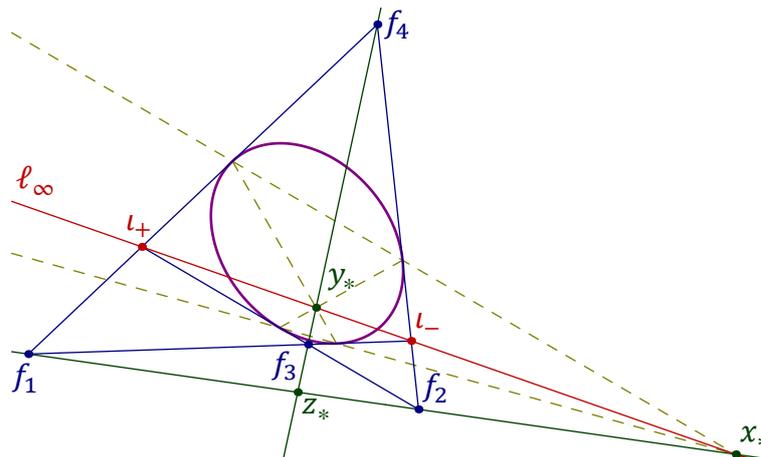


Рис. 1♦1. Гладкая центральная коника (эллипс или гипербола).

ГС19♦3. Покажите, что диаметр центральной коники делит пополам все хорды, параллельные сопряжённому диаметру.

ГС19♦4 (окружности). Для гладкой непустой вещественной коники C докажите равносильность свойств: а) C проходит через ι_{\pm} б) C центральна и имеет более одной пары главных

¹Переводящая одномерное подпространство в V в евклидово перпендикулярное одномерное подпространство.

осей **в)** S центральна и любые два её сопряжённых диаметра перпендикулярны.

ГС19♦5. Сформулируйте и решите аналог **зад. ГС19♦2** для параболы: сколько у параболы фокусов, директрис, кто такие главные оси, и как всё это располагается, см. рис. 1♦2

ГС19♦6. Дайте определение оси параболы и покажите, что в конечной точке ось пересекает параболу под прямым углом, а касательные, восстановленные в концах любой проходящей через фокус хорды, пересекаются под прямым углом на директрисе.

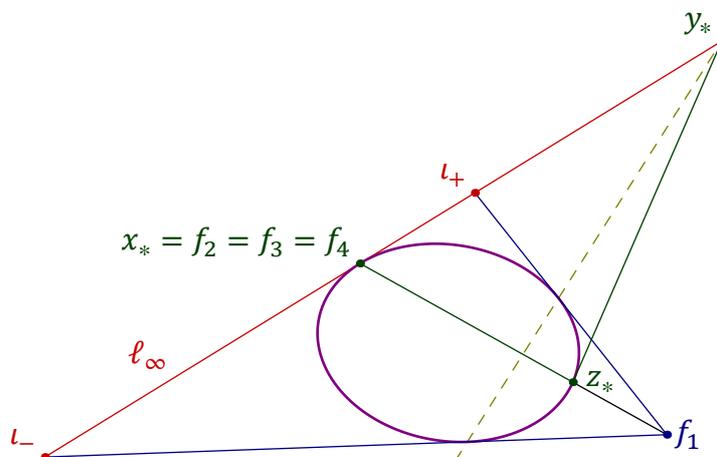


Рис. 1♦2. Парабола.

ГС19♦7. Найдите фокусы, директрисы, центр и асимптоты евклидовых коник

$$2ax = y^2, \quad x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, \quad x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1, \quad (1)$$

где, соответственно, $a > 0$, $a > b > 0$ и $a, b > 0$.

ГС19♦8. Парабола в евклидовом \mathbb{R}^2 пересекает гиперболу $xy = 1$ в точке $(2, 1/2)$, и это их единственная точка пересечения на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$. Напишите уравнение параболы и найдите её фокус и директрису.

ГС19♦9. На евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 опишите ГМТ пересечения всевозможных пар перпендикулярных касательных к трём коникам из **зад. ГС19♦7**.

ГС19♦10. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ выясните тип коники $x^2 + y^2 + 1 = \lambda(2x - x^2 - 2y^2 - 2xy)$ и опишите геометрическое место центров всех центральных коник этого пучка.

ГС19♦11. Под каким углом пересекаются проходящие через точки **а)** $(3, -2)$ и $(0, 1/3)$ **б)** $(-2, 2)$ касательные к конике $9x^2 + 28xy - 6x + 21y^2 - 10y = -1$?

ГС19♦12. Тот же вопрос про конику $x^2 - 4xy + 4x + 4y^2 - 6y = -4$ и точки **а)** $(-4, -2)$ и $(-2, -1/2)$ **б)** $(-5/2, -1)$.

ГС19♦13. Уравнения (1) называются *каноническими* для параболы, эллипса и гиперболы.

Покажите, что отличная от окружности гладкая непустая вещественная коника задаётся каноническим уравнением в единственном с точностью до смены знаков базисных векторов ортонормальном аффинном репере. Найдите эти реперы и уравнения для коник

а) $19x^2 + 50xy + 28x + 33y^2 + 36y + 11 = 0$ **б)** $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2y + 3 = 0$

в) $7x^2 - 8xy + 8x + 2y^2 - 4y + 3 = 0$ **г)** $10x^2 + 26xy - 2x + 17y^2 - 4y + 4 = 0$

д) $-6x^2 - 28xy - 32y^2 - 4y + 5 = 0$ **е)** $x^2 + 2xy + y^2 + 2y = 3$

ГС19♦14. Опишите ГМТ, делящих в заданном отношении α все параллельные заданной прямой хорды данной окружности.

ГС19♦15. Опишите ГМТ — середин пучка параллельных хорд данного эллипса.

ГС19♦16. Опущенные из точки c касательные к параболе пересекают её в точках $a \neq b$. Покажите, что соединяющая середины отрезков $[a, c]$ и $[b, c]$ прямая касается параболы.

ГС19♦17. Напишите однопараметрическое уравнение семейства центральных коники в \mathbb{R}^2 с фокусами $(\pm 3, 0)$ и определите тип каждой коники семейства.