Проективные коники

ГС18◇1. Постройте рациональную параметризацию коник[1]:
а) $3x_0^2+5x_1^2+34x_2^2+4x_0x_1+12x_0x_2=10x_1x_2$ (подсказка: точка $(-7:5:2)$ изотропна)
б) $x_1^2+11x_2^2+2x_0x_2=10x_1x_2$ **в)** $2x_1^2+25x_2^2+8x_0x_2=2x_0x_1+14x_1x_2$.

ГС18◇2. Коника $C\subset\mathbb{P}_2$ имеет уравнение $x_0^2+x_1^2+12x_2^2-2x_0x_1+10x_0x_2-8x_1x_2=0$. Напишите уравнение двойственной коники $C^\times\subset\mathbb{P}_2^\times$ в двойственном базисе.

ГС18◇3. Сколько общих касательных может быть у двух гладких коник?

ГС18◇4. Над полем $\mathbb{C}$ напишите уравнения всех касательных, опущенных из точки $(1:1:1)$ на все коники из зад. ГС18◇1-2.

ГС18◇5. Покажите, что для любой неперспективной гомографии $\varphi:\ \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ на $\mathbb{P}_2$ существует единственная гладкая коника C, такая что $y=\varphi(x)$ если и только если прямая (xy) касается C.

ГС18◇6. Каково уравнение гладкой коники C в базисе (e_0,e_1,e_2), если треугольник $e_0e_1e_2$ **а)** вписан в C **б)** автополярен относительно C?

Поляритет и сопряжение относительно гладкой квадрики. Гладкая квадрика $Q=V(q)\subset\mathbb{P}(V)$ задаёт линейное биективное *полярное преобразование* $\overline{q}:\ \mathbb{P}(V)\xrightarrow{\sim}\mathbb{P}(V^*)$ переводящее точку $p\in\mathbb{P}(V)$ в её *полярную гиперплоскость*[2] $\mathbb{P}(p^\perp)\subset\mathbb{P}(V)$. Две точки (соотв. гиперплоскости) называются *сопряжёнными* относительно Q, если одна из них лежит на поляре (соотв. проходит через полюс) другой.

ГС18◇7. Опишите полярное преобразование евклидовой плоскости[3] $\mathbb{R}^2$ относительно «мнимой окружности» $x^2+y^2=-1$.

ГС18◇8. Докажите, что точки a и b прямой, которая пересекает гладкую квадрику Q в отличных от a, b точках c и d, сопряжены относительно Q если и только если a и b гармоничны c и d.

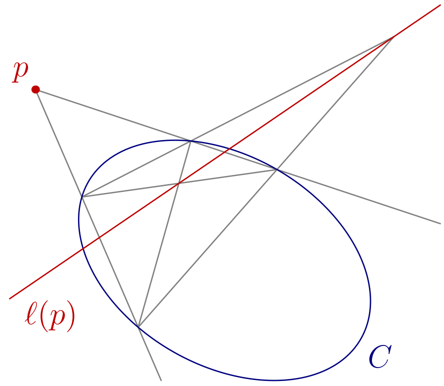

Рис. 1◇1.

ГС18◇9 (двойное отношение точек на конике). *Двойным отношением* $[a,b,c,d]_C$ четырёх различных точек гладкой коники C называется двойное отношение прямых $[(pa),(pb),(pc),(pd)]$ из пучка с центром в какой-либо пятой точке $p\in C$. Покажите, что оно не зависит от выбора точки p, и что две хорды коники C тогда и только сопряжены относительно C, когда их концы гармоничны на C.

ГС18◇10 (построение Штейнера). Обоснуйте показанное на рис. 1◇1 построение одной линейкой поляры $\ell(p)$ данной точки p относительно данной коники C.

ГС18◇11. Одной линейкой постройте поляру данной точки и полюс данной прямой при полярном преобразовании евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно данной окружности в случае, когда прямая не пересекает окружности, а точка лежит внутри очерчиваемого окружностью круга.

ГС18◇12. Назовём *гомографией* на гладкой конике C любую сохраняющую двойное отношение биекцию $\gamma:\ C\xrightarrow{\sim}C$. Покажите, что если γ не является инволюцией, то ГМТ пересечения прямых $(x\gamma(y))\cap(y\gamma(x))$, где $x\neq y$ независимо пробегают C, это прямая, пересекающая конику C в точности по неподвижным точкам гомографии γ. Одной линейкой постройте неподвижные точки гомографии $C\xrightarrow{\sim}C$, если задано её действие на 3 разные точки.

[1] Ср. с контрольной работой № 5
[2] Или *поляру*. Точка p называется *полюсом* гиперплоскости $\mathbb{P}(p^\perp)$.
[3] Вложенной в $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ в виде стандартной карты U_0

Терминология и соглашения. Всюду далее основное поле $\Bbbk$ по умолчанию предполагается алгебраически замкнутым характеристики нуль. Проективные подпространства в пространстве $\mathbb{P}(S^dV^*)$ гиперповерхностей степени d в $\mathbb{P}(V)$ называются *линейными системами* гиперповерхностей. Линейные системы размерностей 1, 2 и 3 называются *пучками, связками* и *сетями* соответственно. Пересечение всех гиперповерхностей линейной системы называется *базисным множеством* этой системы.

ГС18⋄13 (сеть окружностей). Рассмотрим евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ как множество вещественных точек комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$, вложенной в $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ в качестве стандартной аффинной карты U_0. Найдите на $\mathbb{P}_2$ две точки $\iota_\pm$, через которые проходят все евклидовы окружности, и докажите, что каждая непустая гладкая вещественная[4] коника в $\mathbb{R}^2$, проходящая в $\mathbb{P}_2$ через точки $\iota_\pm$, является окружностью.

ГС18⋄14. Верно ли, что все коники, проходящие через точки $(1:1:0)$, $(1:0:1)$, $(0:1:1)$ и точку **а)** $(1:1:1)$ **б)** $(2:1:1)$ образуют пучок? Если да, напишите явное однопараметрическое уравнение коник такого пучка, если нет, объясните, почему.

ГС18⋄15. Могут ли все коники в пучке быть вырожденными? Пусть в пучке есть хоть одна гладкая коника. Может ли в нём быть ровно **а)** 0 **б)** 1 **в)** 2 **г)** 3 **д)** 4 вырожденные коники? Если да, приведите явный пример такого пучка, если нет, объясните, почему.

ГС18⋄16. Могут ли две гладкие коники пересекаться ровно по **а)** 0 **б)** 1 **в)** 2 **г)** 3 **д)** 4 **е)** 5 точкам? Если да, приведите явные примеры таких коник, если нет, объясните, почему.

ГС18⋄17. Может ли пучок коник содержать ровно одну особую конику, не являющуюся двойной прямой? Если да, напишите явное однопараметрическое уравнение коник такого пучка, если нет, объясните, почему.

ГС18⋄18. Напишите явное однопараметрическое уравнение пучка коник с тремя данными базисными точками. Сколько особых коник может быть в таком пучке?

ГС18⋄19. Образуют ли пучок коники, касающиеся прямых $x_0 = 0$ и $x_1 = 0$, соответственно, в точках **а)** $(0:1:0)$ и $(1:0:0)$ **б)** $(0:0:1)$ и $(1:0:0)$? Если да, напишите явное однопараметрическое уравнение коник такого пучка, если нет, объясните, почему.

ГС18⋄20. Напишите уравнение коники, проходящей

а) через точки $(1:1:0)$, $(1:0:1)$, $(0:1:1)$, $(1:1:1)$, $(1:-2:3)$

б) через точки $(1:1:0)$, $(1:0:1)$, $(0:1:1)$ и касающейся прямой $x_0 + x_1 + x_2 = 0$ в точке $(1:-2:1)$

в) через точку $(1:2:3)$ и касающейся прямых $x_0 = x_1$ и $x_1 = x_2$, соответственно, в точках $(1:1:0)$ и $(0:1:1)$.

Много ли таких коник? Если одна, то гладкая ли она? Если да, то чем: эллипсом, гиперболой или параболой она изображается в стандартной аффинной карте U_0?

ГС18⋄21*. Покажите, что особые точки гиперповерхности[5] $\Sigma \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$ особых коник в $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ суть двойные прямые и только они, и покажите, что касательное пространство[6] к Σ в гладкой точке, представляющей собою распавшуюся конику $\ell_1 \cup \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$, состоит из всех коник, проходящих через точку $\ell_1 \cap \ell_2$.

ГС18⋄22*. Найдите размерность линейной системы кубических кривых в $\mathbb{P}_2$, проходящих через фиксированные, не лежащие на одной конике шесть точек, никакие три из которых не коллинеарны.

ГС18⋄23*. Опишите эффективный способ сведения системы из двух однородных уравнений степени 2 на 3 неизвестные к одному кубическому уравнению на одну неизвестную.

---

[4]Т. е. задаваемая квадратичной формой с вещественными коэффициентами.

[5]Точка p гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{P}_n$ называется *особой*, если ограничение многочлена f на любую проходящую через p прямую либо тождественно нулевое, либо имеет кратный корень в точке p.

[6]Касательное пространство T_pS к гиперповерхности $S = V(f) \subset \mathbb{P}_n$ в точке $p \in S$ есть объединение всех проходящих через p прямых, на которые многочлен f ограничивается либо в тождественный нуль, либо в многочлен, имеющий кратный корень в точке p.