Евклидова геометрия

Терминология. Фигуры $I_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, i\ |x_i| \leqslant 1\}$ и $\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i = 1\ \&\ \forall\, i\ x_i \geqslant 0\}$ называются стандартными n-мерными *кубом* и *симплексом*. Стандартным *кокубом* $C_n \subset \mathbb{R}^n$ называется выпуклая оболочка центров $(n-1)$-мерных[1] граней стандартного куба I_n. Угол между вектором v и векторным подпространством U определяется как $\min_{u \in U \smallsetminus 0} \measuredangle(v,u) = \measuredangle(v, v_U)$, где $v - v_U \in U^\perp$.

ГС10◇1. Две гиперплоскости в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^5$ заданы уравнениями
- **а)** $2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_5 = 1$ и $x_1 - 2x_2 + 3x_4 - x_5 = 3$
- **б)** $x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 1$ и $-2x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 8x_4 - 4x_5 = 7$

Найдите угол между ними[2], а если он нулевой — расстояние.

ГС10◇2. В каждом из пунктов предыдущей задачи опишите ГМТ, равноудалённых от двух данных в нём гиперплоскостей, и задайте его явным уравнением.

ГС10◇3. Точки $p_0, p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ не содержатся в одной $(k-1)$-мерной плоскости. Опишите ГМТ, равноудалённых от всех этих точек.

ГС10◇4. Два вектора в евклидовом пространстве лежат по одну сторону от данной гиперплоскости. Угол между векторами тупой. Верно ли, что угол между их ортогональными проекциями на эту гиперплоскость тоже тупой?

ГС10◇5. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$ матрица Грама выходящих из вершины A векторов $e_1 = \vec{AD}$, $e_2 = \vec{AB}$, $e_3 = \vec{AA_1}$ равна $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. Найдите **а)** расстояние и угол между прямыми CC_1 и B_1D_1 **б)** площадь треугольника $\triangle\, A_1C_1D$ **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD **г)** центр и радиус вписанного в этот тетраэдр шара **д)** угол между плоскостями A_1C_1B и B_1D_1C

ГС10◇6. Вешина A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ имеет координаты $(0,1,-1,-1)$, а четыре соединённых с нею рёбрами вершины — координаты $(1,2,-1,0)$, $(3,1,-2,2)$, $(-1,3,0,-1)$, $(2,-2,3,-3)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с этими четырьмя вершинами, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и пятой вершиной в противоположной к A вершине параллелепипеда Π. Найдите: **а)** четырёхмерный объём симплекса Δ_4 **б)** трёхмерный объём тетраэдра Δ_3 **в)** расстояние от точки A, до трёхмерного подпространства, содержащего тетраэдр Δ_3 **г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного около Δ_4 **д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного около Δ_3.

ГС10◇7. Верно ли что середины рёбер **а)** трёхмерного **б)** четырёхмерного правильного симплекса являются вершинами правильного кокуба?

ГС10◇8 (куб). В стандартном n-мерном кубе I_n найдите:
- **а)** количство граней каждой из возможных размерностей
- **б)** число внутренних[3] диагоналей, ортогональных заданной внутренней диагонали
- **в)** длину внутренней диагонали (диаметр описанного шара) и её предел при $n \to \infty$
- **г)** угол между внутренней диагональю и ребром и его предел при $n \to \infty$
- **д)** отношения, в которых внутренняя диагональ делится ортогональными проекциями

[1] Здесь и далее под *размерностью* фигуры Φ понимается размерность пересечения всех содержащих эту фигуру аффинных подпространств.

[2] Т. е. угол между прямыми, которые высекаются этими гиперплоскостями в ортогональной их пересечению двумерной плоскости.

[3] Т. е. не лежащих в грани.

на неё всех вершин куба.

ГС10⋄9 (симплекс). В стандартном n-мерном симплексе Δ_n найдите

а) радиусы вписанного и описанного шаров и их пределы при $n \to \infty$

б) угол между ребром и не содержащей его $(n-1)$-мерной гранью

ГС10⋄10 (кокуб). Задайте стандартный n-мерный кокуб C^n системой линейных неоднородных неравенств и найдите количество его граней в каждой размерности, а также радиус вписанного в C^n шара и его предел при $n \to \infty$.

ГС10⋄11. Найдите радиус шара, описанного в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^5$ вокруг пирамиды с вершиной в точке $(1, 0, 0, 0, 0)$, основанием которой является лежащий в гиперплоскости $x_1 = 0$ правильный четырёхмерный симплекс, описанный около единичного шара с центром в нуле.

ГС10⋄12. Четырёхмерный шар лежит в углу четырёхмерного куба со стороной 1 возле вершины a, касаясь всех сходящихся в a трёхмерных граней куба, а также трёхмерной гиперплоскости, проходящей через все вершины куба, соединённые с a ребром. Ещё один такой же шар с аналогичными свойствами лежит в противоположном к a углу куба. Найдите расстояние между центрами шаров.

ГС10⋄13. В каждую вершину n-мерного куба со стороной 2 помещён n-мерный шар радиуса 1 с центром в вершине куба. Шар B с центром в центре куба касается внутри куба всех шаров с центрами в вершинах. При каких n шар B целиком содержится в кубе?

ГС10⋄14. В трёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ обозначим через τ_v, σ_π и $\varrho_{v,\varphi}$, соответственно, сдвиг на вектор v, отражение в плоскости π и поворот вокруг прямой с направляющим вектором v на угол φ против ЧС, если глядеть вдоль v. Для произвольного движения $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ опишите движения: **а)** $F \circ \tau_v \circ F^{-1}$ **б)** $F \circ \sigma_\pi \circ F^{-1}$ **в)** $F \circ \varrho_{v,\varphi} \circ F^{-1}$