

### Двойственность

**Терминология и обозначения.** Для векторного пространства  $V$  над полем  $\mathbb{k}$  пространство линейных функций  $V \rightarrow \mathbb{k}$  обозначается  $V^*$  и называется *двойственным* к  $V$ , а элементы этого пространства называются *ковекторами* или *линейными функционалами* на  $V$ . Значение ковектора  $\xi \in V^*$  на векторе  $v \in V$  иначе обозначается через  $\langle \xi, v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \xi(v) \in \mathbb{k}$ . Для линейного отображения  $F : U \rightarrow W$  линейное отображение  $F^* : W^* \rightarrow U^*$ ,  $\xi \mapsto \xi \circ F$  называется *двойственным* к  $F$ . Таким образом,  $\langle F^*\xi, v \rangle = \langle \xi, Fv \rangle$  для всех  $\xi \in V^*$  и  $v \in V$ . Если  $\dim V = n$ , то наборы векторов  $e = (e_1, \dots, e_n)$  в  $V$  и  $e^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$  в  $V^*$  называются *двойственными базисами* если  $\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij}$ , где символ Кронекера  $\delta_{ij}$  равен 1 при  $i = j$  и 0 при  $i \neq j$ . Сопоставление вектору  $v \in V$  функционала вычисления  $\text{ev}_v : V^* \rightarrow \mathbb{k}$ ,  $\xi \mapsto \langle \xi, v \rangle$ , вкладывает  $V$  в  $V^{**}$ . Если  $\dim V < \infty$ , это вложение является изоморфизмом. Для подпространств  $U \subset V$  и  $W \subset V^*$  подпространства  $\text{Ann } U \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi \in V^* \mid \langle \xi, v \rangle = 0\} \subset V^*$  и  $\text{Ann } W \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \langle \xi, v \rangle = 0\} \subset V$  называются *аннуляторами* подпространств  $U$  и  $W$ . Сопоставление подпространству его аннулятора является инволютивной оборачивающей включения биекцией между подпространствами размерности  $k$  в  $V$  и коразмерности  $k$  в  $V^*$ . Эта биекция переводит суммы в пересечения, а пересечения в суммы.

**ГС1♦1.** Убедитесь, что двойственные базисы действительно являются базисами.

**ГС1♦2.** Опишите двойственный оператор к оператору гомотетии  $\Gamma_\lambda : V \rightarrow V, v \mapsto \lambda v$ .

**ГС1♦3.** Линейный оператор  $F : V \rightarrow V$  имеет в базисе  $e$  матрицу  $F_e$ . Найдите матрицу  $F_{e^*}$  двойственного оператора  $F^* : V^* \rightarrow V^*$  в двойственном базисе  $e^*$ .

**ГС1♦4.** Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{k}$  различны,  $f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$  и  $V = \mathbb{k}[x]/(f)$ .

а) Покажите, что функционалы вычисления  $\varepsilon_i : V \rightarrow \mathbb{k}, [g] \mapsto g(\alpha_i)$ , корректно определены и образуют базис в  $V^*$ .

б) Найдите двойственный к нему базис в  $V$ .

в) В базисе  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  напишите матрицы операторов  $V^* \rightarrow V^*$ , двойственных к операторам умножения на классы  $[x - \alpha_1], [(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)], [x]$ .

**ГС1♦5.** Каким наименьшим числом уравнений задаётся а) сумма б) пересечение линейных оболочек векторов  $(1, 1, 6, 2), (1, 1, 6, 3), (2, 3, 15, 1), (2, 4, 18, -1)$  и векторов  $(1, -2, -2, 5), (2, -4, -3, 9), (-3, 6, 8, -17), (-3, 6, 5, -14)$  в  $\mathbb{Q}^4$ .

**ГС1♦6.** В  $\mathbb{Q}^5$  найдите размерность суммы и пересечения пространств решений систем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 8x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 - 10x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 16x_5 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 21x_5 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 - 30x_5 = 0 \end{cases}$$

**ГС1♦7\*.** Покажите, что сопоставление линейному функционалу  $\varphi : \mathbb{k}[x] \rightarrow \mathbb{k}$  экспоненциальной производящей функции  $\varphi(t) = \sum_{k \geq 0} \langle \varphi, x^k \rangle \cdot t^k / k! \in \mathbb{k}[[t]]$  задаёт изоморфизм  $\mathbb{k}[x]^* \cong \mathbb{k}[[t]]$ , и докажите линейную независимость над  $\mathbb{k}$  множества

а) функционалов вычисления  $\text{ev}_\alpha : \mathbb{k}[x] \rightarrow \mathbb{k}, f \mapsto f(\alpha)$ , где  $\alpha \in \mathbb{k}$

б) степенных рядов  $e^{\lambda t}$ , где  $\lambda \in \mathbb{k}$ .

**ГС1♦8\*.** В условиях предыдущей задачи опишите оператор  $\mathbb{k}[[t]] \rightarrow \mathbb{k}[[t]]$ , двойственный к

а) оператору дифференцирования  $\frac{d}{dx} : \mathbb{k}[x] \rightarrow \mathbb{k}[x], f \mapsto f'$

б) оператору умножения на  $x : \mathbb{k}[x] \rightarrow \mathbb{k}[x], f \mapsto xf$

в) оператору  $x \frac{d}{dx} : \mathbb{k}[x] \rightarrow \mathbb{k}[x], f \mapsto xf'$ .