# Векторные пространства

**ГС4◇1.** При каких $t \in \mathbb{Q}$ векторы $(1,2,3)$, $(2,5,7)$ и $(3,7,10+t)$ образуют базис в $\mathbb{Q}^3$?

**ГС4◇2.** Векторы $v_1$, $v_2$, $v_3$ линейно независимы. Для каких чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ векторы $v_1 + \lambda_2 v_2$, $v_2 + \lambda_3 v_3$, $v_3 + \lambda_1 v_1$ линейно зависимы?

**ГС4◇3.** Является ли векторным пространством над $\mathbb{R}$ множество

**а)** всех вещественных последовательностей[1] $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

**б)** ограниченных сверху вещественных последовательностей $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

**в)** приведённых[2] многочленов в $\mathbb{R}[x]$

**г)** $\{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f \leqslant m \;\&\; x^m f(1/x) = f(x)\}$?

**ГС4◇4.** Укажите базис и найдите размерность векторного пространства

**а)** однородных многочленов степени $d$ от $m$ переменных

**б)** всех многочленов степени $\leqslant d$ от $m$ переменных.

**в)** однородных симметричных[3] многочленов степени $\leqslant 6$ от $x, y, z$.

**ГС4◇5.** Какова размерность вещественного пространства многочленов $f \in \mathbb{R}[x]$ степени $\leqslant n$, обращающихся в нуль в точке $(3-2i) \in \mathbb{C}$?

**ГС4◇6.** Являются ли вещественные числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}$ линейно независимыми над $\mathbb{Q}$?

**ГС4◇7.** Являются ли вещественные функции $e^x, e^{2x}, \dots, e^{nx}$ линейно независимыми над $\mathbb{R}$?

**ГС4◇8.** Образуют ли базис в пространстве $\mathbb{Q}[x]_{\leqslant n}$ многочленов степени $\leqslant n$ с рациональными коэффициентами многочлены **а)** $(x-k)^n$ **б)** $\binom{x+k}{k} = (x+1)\cdots(x+k)/k!$ с $0 \leqslant k \leqslant n$.

**ГС4◇9 (пространство подмножеств).** Обозначим через $\mathcal{S}(M)$ множество всех подмножеств данного множества $M$. Покажите, что $\mathcal{S}(M)$ является векторным пространством над полем $\mathbb{F}_2$ относительно операций $X + Y \stackrel{\text{def}}{=} (X \cup Y) \smallsetminus (X \cap Y)$, $1 \cdot X \stackrel{\text{def}}{=} X$, и $0 \cdot X \stackrel{\text{def}}{=} \varnothing$. Для $m$-элементного множества $M$ найдите $\dim \mathcal{S}(M)$ и укажите в $\mathcal{S}(M)$ какой-нибудь базис.

**ГС4◇10.** Покажите, что объединение двух векторных подпространств является векторным пространством только если одно из подпространств содержится в другом.

**ГС4◇11.** Пусть $\dim(U+W) = \dim(U \cap W) + 1$ для векторных подпространств $U, W \subset V$. Обязательно ли $U + W$ равно одному из подпространств $U$, $W$, а $U \cap W$ — другому?

**ГС4◇12.** Докажите для любых линейных операторов $F, G : V \to V$ на произвольном векторном пространстве $V$ включения **а)** $\ker(FG) \supset \ker(G)$ **б)** $\operatorname{im}(FG) \subset \operatorname{im}(F)$ и приведите конечномерные примеры, где оба эти включения строгие.

**ГС4◇13.** Докажите для любого линейного оператора $F : V \to V$ на конечномерном векторном пространстве $V$ импликации: **а)** $\ker(F^k) = \ker(F^{k+1}) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \ker(F^k) = \ker(F^{k+n})$ **б)** $\operatorname{im}(F^k) = \operatorname{im}(F^{k+1}) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \operatorname{im}(F^k) = \operatorname{im}(F^{k+n})$.

**ГС4◇14 (четырёхмерный куб).** Фигура $I^4 \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \forall i\ |x_i| \leqslant 1\}$ называется *стандартным четырёхмерным кубом*. Нарисуйте какую-нибудь двумерную параллельную проекцию четырёхмерного куба, у которой все вершины различны. Сколько у четырёхмерного куба вершин, рёбер, двумерных и трёхмерных граней? Нарисуйте развёртку трёхмерной поверхности[4] четырёхмерного куба и напишите инструкцию по склейке[5] из неё четырёхмерного куба. В скольких кубиках побываешь, когда гуляешь по трёхмерной поверхности четырёхмерного куба так, что выходишь из каждого кубика сквозь двумерную грань **а)** противоположную **б)** соседнюю слева к той, сквозь которую вошёл?

[1] Сложение последовательностей и умножение их на константы происходит поэлементно.

[2] Т. е. со старшим коэффициентом 1.

[3] Т. е. не меняющихся при перестановках переменных: $f(x,y,z) = f(y,z,x) = f(y,x,z)$.

[4] Она представляет собою трёхмерный многогранник, собранный из обычных трёхмерных кубиков.

[5] Укажите, какие пары двумерных граней трёхмерных кубов надлежит склеить друг с другом и как именно.