Аффинные преобразования

ГС2⋄1. На аффинной плоскости задан $\triangle abc$. Как связаны друг с другом координаты произвольной точки относительно реперов $(a;\ \overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$ и $(b;\ \overrightarrow{ba}, \overrightarrow{bc})$?

ГС2⋄2. Зафиксируем на аффинной плоскости две точки $p \neq q$. Является ли аффинным отображение, переводящее каждую точку x в равновесный барицентр точек p, q, x? Есть ли у этого отображения неподвижные точки?

ГС2⋄3. Существует ли аффинное преобразование вещественной прямой $\mathbb{R}^1$, переводящее
- **а)** точки 5, 6, 7 соответственно в точки 2, 3, 4
- **б)** точки 1, 2, 3 соответственно в точки −2, −1, 4
- **в)** точки 1, −2, 3 соответственно в точки −2, 3, 1?

ГС2⋄4. Выясните, имеется ли у аффинного преобразования $\mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$,
- **а)** действующего по правилу $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 - 2x_2 + 2,\ 2x_1 - x_2 + 2)$
- **б)** переводящего точки $(-1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, -1)$ в точки $(-3, 0)$, $(6, 2)$, $(10, -1)$
- **в)** переводящего вершины $\triangle abc$ в точки $\frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c$, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c$ и $\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$,

1) неподвижная точка 2) неподвижная прямая[1] 3*) инвариантная прямая[2].
Если да, то укажите все такие точки и прямые явно, если нет, объясните почему.

ГС2⋄5. Существует ли аффинное преобразование плоскости $\mathbb{Q}^2$, переводящее
- **а)** точку $(1, -2)$ в точку $(0, 10)$, а прямые $10x_1 - 4x_2 = 1$ и $3x_1 - 3x_2 = -7$ — соответственно, в прямые $x_1 - 2x_2 = -3$ и $x_1 - x_2 = 6$
- **б)** прямые $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и $x_1 + x_2 = 1$ в прямые $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$ и $x_1 = 1$
- **в)** прямые $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = x_2$ и $x_1 = 2x_2$ в $x_1 = x_2$, $x_1 = 2x_2$, $x_1 = 3x_2$ и $x_1 = 4x_2$?

Если да, опишите такое преобразование явной формулой[3], если нет, объясните почему.

ГС2⋄6. Опишите аффинное преобразование $\varphi \circ \gamma_{p,\lambda} \circ \varphi^{-1}$, где $\gamma_{p,\lambda}$ — гомотетия с центром в точке p и коэффициентом λ, а φ — произвольное биективное аффинное преобразование.

ГС2⋄7. Чему равна композиция двух гомотетий с разными центрами и коэффициентами?

ГС2⋄8. Покажите, что аффинное преобразование, переводящее каждую прямую в параллельную ей или совпадающую с ней прямую, является либо параллельным переносом, либо гомотетией.

Дополнительные задачи

ГС2⋄9*. Точки b_1 и c_1 лежат на прямых (ac) и (ab) так, что $\overrightarrow{ab_1} = \beta \cdot \overrightarrow{ac}$ и $\overrightarrow{ac_1} = \gamma \cdot \overrightarrow{ac}$, где $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ — заданные числа, отличные от 0, 1.
- **а)** Найдите барицентрические координаты точки пересечения прямых (bb_1) и (cc_1) относительно $\triangle abc$
- **б)** В каком отношении делит эта точка отрезки $[b, b_1]$ и $[c, c_1]$?

ГС2⋄10*. Точки a_1, b_1, c_1 лежат на прямых (bc), (ca) и (ab) так, что $\overrightarrow{ba_1} = \alpha \cdot \overrightarrow{bc}$, $\overrightarrow{cb_1} = \beta \cdot \overrightarrow{ca}$, $\overrightarrow{ac_1} = \gamma \cdot \overrightarrow{ab}$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ — заданные числа, отличные от 0, 1. Как относится площадь треугольника, образованного прямыми (aa_1), (bb_1) и (cc_1), к площади $\triangle abc$?

[1] Т. е. прямая, каждая точка которой неподвижна.
[2] Т. е. прямая, которая переводится в себя.
[3] Как в зад. ГС2⋄4 (а).