Проективные квадрики

ГЛ12◇1. Одной линейкой постройте касательную к гладкой конике C в данной точке $p \in C$.

ГЛ12◇2. Покажите, что на гладкой конике C:

а) две инволюции $C \xrightarrow{\sim} C$ коммутируют друг с другом если и только если пары их неподвижных точек гармоничны на C

б) три инволюции $C \xrightarrow{\sim} C$ тогда и только тогда составляют вместе с тождественным преобразованием Id_C группу Клейна $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$, когда прямые, соединяющие пары их неподвижных точек, образуют автополярный относительно C треугольник.

ГЛ12◇3*. Одной линейкой постройте описанный около данной гладкой коники треугольник с вершинами на трёх заданных прямых. Сколько решений может иметь эта задача в принципе и сколько при достаточно общем расположении прямых и коники?

ГЛ12◇4*. Сформулируйте и решите двойственную к предыдущей задачу.

ГЛ12◇5. Квадрика Сегре $S \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\mathrm{End}\, U)$ состоит из линейных операторов ранга 1 на векторном пространстве $U \simeq \Bbbk^2$. Покажите, что:

а) касательное пространство к S в точке $v \otimes \xi : u \mapsto v \cdot \xi(u)$, где $u \in U$, $\xi \in U^*$, является проективизацией векторного пространства $\{f : U \to U \mid f(\mathrm{Ann}\, \xi) \subset \Bbbk \cdot v\}$

б) каждая лежащая в $\mathrm{PGL}(U) = \mathbb{P}_3 \smallsetminus S$ гомография $\overline{f} : \mathbb{P}(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(U)$ переводит $a \in \mathbb{P}(U)$ в такую точку $b \in \mathbb{P}(U)$, что плоскость, проходящая в $\mathbb{P}_3$ через точку $\overline{f}$ и лежащую на S прямую $\mathbb{P}(U) \otimes a^{\times}$, где $a^{\times} \in \mathbb{P}(U^*)$, $a^{\times}(v) = \det(v, a)$, пересекает квадрику S по объединению прямых $\mathbb{P}(U) \otimes a^{\times}$ и $b \otimes \mathbb{P}(U^*)$.

ГЛ12◇6. Даны четыре попарно не пересекающиеся прямые в **а)** $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ **б)** $\mathbb{A}(\mathbb{C}^4)$ **в)** $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$. Сколько прямых пересекает все четыре данные прямые? Укажите все возможные ответы и выясните, какие из них устойчивы к малым шевелениям четырёх данных прямых.

ГЛ12◇7. Покажите, что проекция непустой гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ из любой точки $p \in Q$ на произвольную гиперплоскость $\Gamma \not\ni p$ задаёт бирациональную биекцию[1] между дополнением $Q \smallsetminus T_pQ$ и аффинным пространством[2] $\Gamma \smallsetminus T_pQ \simeq \mathbb{A}^{n-1}$.

ГЛ12◇8. Из скольких точек состоит квадрика $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \alpha\, x_3^2 = 0$ в $\mathbb{P}_3$ над полем[3] $\mathbb{F}_9$ в зависимости от параметра $\alpha \in \mathbb{F}_9$?

ГЛ12◇9. Покажите, что на непустой гладкой квадрике в $\mathbb{P}_n$ над бесконечным полем всегда найдутся $n+2$ точки, никакие $n+1$ из которых не лежат в одной гиперплоскости.

ГЛ12◇10*. Сопоставим каждой прямой $(ab) \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ точку $a \wedge b \in \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$. Покажите, что это правило корректно задаёт биекцию между множеством прямых в $\mathbb{P}_3$ и точками *квадрики Плюккера* $P = \{\omega \in \mathbb{P}_5 \mid \omega \wedge \omega = 0\}$. Убедитесь, что квадрика Плюккера гладкая и что она пересекает касательное пространство $T_\ell P$, где $\ell \in P$ — точка, соответствующая прямой $\ell \subset \mathbb{P}_3$, по множеству точек, которые соответствуют всевозможным пересекающимся с ℓ прямым в $\mathbb{P}_3$.

ГЛ12◇11*. В пространстве $\mathbb{P}_3$ над бесконечным полем заданы шесть точек p_{ij}, занумерованных парами цифр $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, причём никакие четыре из этих точек не компланарны. Покажите, что плоскости[4] $(p_{12}p_{13}p_{14})$, $(p_{12}p_{23}p_{24})$, $(p_{13}p_{23}p_{34})$, $(p_{14}p_{24}p_{34})$ пересекаются в одной точке если и только если плоскости[5] $(p_{12}p_{23}p_{13})$, $(p_{12}p_{24}p_{14})$, $(p_{13}p_{14}p_{34})$, $(p_{23}p_{24}p_{34})$ пересекаются в одной точке.

[1] Соответствие между проективными многообразиями называется *бирациональным*, если однородные координаты соответствующих друг другу точек являются рациональными функциями друг друга.

[2] Заодно убедитесь, что $\Gamma \smallsetminus T_pQ$ это действительно $\mathbb{A}^{n-1}$.

[3] Поле $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[x]/(x^2+1)$ состоит из чисел вида $a + b\sqrt{-1}$, где $a, b \in \mathbb{Z}/(3)$ и $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1 \in \mathbb{Z}/(3)$.

[4] Натянутые на тройки точек с имеющими одну общую цифру парами индексов.

[5] Натянутые на тройки точек с не содержащими некоторую цифру парами индексов.