

Выпуклые фигуры

- ГЛ9♦1.** На прямоугольном столе лежит несколько салфеток прямоугольной формы со сторонами, параллельными краям стола. Докажите, что а) если любые две салфетки пересекаются, то и все салфетки пересекаются б*) если каждая салфетка пересекает как минимум $3/4$ остальных, то есть салфетка, пересекающаяся со всеми. в*) Обобщите эти факты на старшие размерности.
- ГЛ9♦2*** (лемма Каратеодори). Докажите, что каждая точка из выпуклой оболочки любого множества точек в \mathbb{R}^n является выпуклой комбинацией не более $n + 1$ этих точек.
- ГЛ9♦3***. Докажите, что любое конечное покрытие аффинного пространства \mathbb{R}^n аффинными полупространствами содержит подпокрытие, состоящее из $n + 1$ полупространств.
- ГЛ9♦4*** (теорема Хелли). Некое множество замкнутых выпуклых фигур в \mathbb{R}^n содержит компактную фигуру, и любые $n + 1$ фигур в этом множестве имеют непустое пересечение. Докажите, что пересечение всех фигур непусто.
- ГЛ9♦5***. Докажите, что любое пятно на скатерти, расстояние между каждыми двумя точками которого не превышает 1, накрывается блюдцем радиуса $1/\sqrt{3}$.
- ГЛ9♦6** (двойственные конусы). Двойственным к выпуклому многогранному конусу $\sigma \subset V$ называется конус $\sigma^\vee = \{\xi \in V^* \mid \forall v \in \sigma \xi(v) \geq 0\}$, лежащий в двойственном к V пространстве V^* . Покажите, что $\sigma^{\vee\vee} = \sigma$, т. е. $\sigma = \{v \in V \mid \xi(v) \geq 0 \ \forall \xi \in \sigma^\vee\}$.
- ГЛ9♦7.** Пусть оба конуса σ и σ^\vee не содержат ненулевых векторных подпространств. Верно ли что они имеют одинаковое число одномерных граней?
- ГЛ9♦8.** Покажите, что минимальная по включению грань выпуклого многогранного конуса σ является векторным подпространством и равна $\sigma \cap (-\sigma)$, где $-\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid -v \in \sigma\}$.
- ГЛ9♦9.** Докажите, что следующие условия на выпуклый многогранный конус $\sigma \subset V$ эквивалентны: а) σ не содержит ненулевых векторных подпространств б) $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ в) σ^\vee линейно порождает V^* г) $\exists \xi \in \sigma^\vee : \sigma \cap \text{Ann}(\xi) = \{0\}$.
- ГЛ9♦10.** Покажите, что выпуклый многогранный конус η является гранью выпуклого многогранного конуса σ если и только если $\eta \subset \sigma$ и $\forall v_1, v_2 \in \sigma \ v_1 + v_2 \in \eta \Rightarrow v_1, v_2 \in \eta$.
- ГЛ9♦11.** Пусть выпуклые многогранные конусы σ_1 и σ_2 пересекаются по общей грани τ . Верно ли, что $\tau = \sigma_1 \cap \text{Ann}(\xi) = \sigma_2 \cap \text{Ann}(\xi)$ для некоторого $\xi \in \sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee$?
- ГЛ9♦12.** Сопоставим k -мерной грани τ выпуклого многогранного конуса¹ $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ множество $\text{Ann}(\tau) \cap \sigma^\vee \subset V^*$. Покажите, что при всех $k \leq \dim \sigma$ таким образом получается корректно определённая и обращающая включения биекция между k -мерными гранями конуса σ и $(n - k)$ -мерными гранями двойственного конуса σ^\vee .
- ГЛ9♦13.** Обозначим через $W \subset V$ линейную оболочку грани τ выпуклого многогранного конуса $\sigma \subset V$. Покажите, что $\sigma + W$ является выпуклым многогранным конусом в фактор пространстве V/W , причём его грани — это в точности $\eta + W$, где η пробегает все содержащие τ грани σ .
- ГЛ9♦14.** Рассмотрим произвольные выпуклый многогранник $M \subset \mathbb{R}^n$ и ковектор $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Верно ли, что: а) M содержится в каждом выпуклом многогранном конусе с вершиной в вершине M , натянутом на все выходящие из этой вершины рёбра б) из любой вершины M можно пройти в любую другую, двигаясь только по рёбрам в) если ξ ограничен на M сверху, то $\max_{x \in M} \xi(x)$ достигается в некоторой вершине M г) для того, чтобы ξ достигал своего максимума на M в вершине p , необходимо и достаточно, чтобы ξ не увеличивал своё значение вдоль всех выходящих из p рёбер?

¹Случай $\dim \sigma < n$ тоже допускается.