Линейные операторы на конечномерном пространстве

ГЛ6⋄1. Найдите собственные числа, собственные подпространства и минимальный многочлен оператора $\sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ на пространстве $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]_{\leqslant n}$ многочленов степени не выше n.

ГЛ6⋄2. Линейный оператор $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет матрицу с числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на побочной диагонали и нулями в остальных местах. Когда он диагонализуем?

ГЛ6⋄3. Пусть $m \geqslant n$. Верно ли, что для любой пары линейных отображений $F : \Bbbk^n \to \Bbbk^m$ и $G : \Bbbk^m \to \Bbbk^n$ отношение характеристических многочленов $\chi_{FG}(t)/\chi_{GF}(t) = t^{m-n}$?

ГЛ6⋄4. Пусть минимальный многочлен оператора $F : V \to V$ является произведением попарно взаимно простых многочленов g_i. Покажите, что $V = \bigoplus U_i$, где $F(U_i) \subset U_i$ и минимальный многочлен ограничения $F|_{U_i}$ равен g_i при всех i.

ГЛ6⋄5 (циклические векторы). Вектор $v \in V$ называется *циклическим* для линейного оператора $F : V \to V$, если векторы вида $F^k(v)$, где $k \geqslant 0$, линейно порождают V.

- **а)** Приведите пример линейного оператора без циклических векторов.
- **б)** Пусть характеристический многочлен χ_F неприводим. Докажите, что $\deg \chi_F = \dim V$ и каждый ненулевой вектор $v \in V$ является циклическим для F.

ГЛ6⋄6. Покажите, что любые два коммутирующих линейных оператора $F, G : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ в некотором базисе можно одновременно записать верхнетреугольными матрицами.

ГЛ6⋄7. Имеются ли в пространстве $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ линейные подпространства размерности $(n+1)$, состоящие из попарно коммутирующих друг с другом диагонализуемых операторов?

ГЛ6⋄8. Найдите ЖНФ квадрата $J_m^2(\lambda)$ жордановой клетки размера $m \times m$ с собственным числом **а)** $\lambda \neq 0$ **б)** $\lambda = 0$.

ГЛ6⋄9*. Найдите $f\big(J_m(\lambda)\big)$ для аналитической[1] в окрестности $\lambda \in \mathbb{C}$ функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

ГЛ6⋄10*. Пусть оператор $F : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ имеет $\mathrm{tr}\, F^k = 0$ при всех $1 \leqslant k \leqslant n$. Верно ли, что F нильпотентен?

ГЛ6⋄11*. Пусть операторы A и B таковы, что $AB - BA = B$. Покажите, что B нильпотентен.

ГЛ6⋄12*. Всякая ли квадратная матрица сопряжена[2] своей транспонированной?

ГЛ6⋄13*. Пусть минимальный многочлен оператора $F : V \to V$ имеет степень $\dim V$. Покажите, что всякий перестановочный с F линейный оператор является многочленом от F.

ГЛ6⋄14*. Пусть поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, и оператор $G : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ перестановочен со всеми операторами, которые перестановочны с оператором $F : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$. Обязательно ли G является многочленом от F?

---

[1] Функция $f : U \to \mathbb{C}$, определённая в открытой окрестности U точки $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *аналитической* в этой окрестности, если для любого $z_0 \in U$ существуют такие $c_k \in \mathbb{C}$, что степенной ряд $\sum_{k \geqslant 0} c_k (z - z_0)^k$ имеет ненулевой радиус сходимости r: $0 < r \leqslant \infty$, и $f(z) = \sum_{k \geqslant 0} c_k (z - z_0)^k$ для всех $z \in U$ с $|z - z_0| < r$.

[2] Матрицы $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ называются *сопряжёнными* если $A = CBC^{-1}$ для некоторой матрицы $C \in \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$.

Персональный табель ____.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 6 (1.12.2020)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5а			
б			
6			
7			
8а			
б			
9			
10			
11			
12			
13			
14			