Аффинная плоскость

Всюду в этом листке по умолчанию предполагается, что характеристика основного поля $\Bbbk$ отлична от 2, т. е. $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1 \neq 0$ в $\Bbbk$. Во всех задачах кроме первой можно считать, что $\Bbbk = \mathbb{Q}$ есть поле рациональных чисел.

ГЛ1◇1. Сколько прямых на аффинной плоскости над конечным полем $\Bbbk = \mathbb{F}_q$ из q чисел?

ГЛ1◇2. Коллинеарны ли на аффинной плоскости $\Bbbk^2$

а) пересечение боковых сторон, пересечение диагоналей и середины оснований произвольной трапеции

б) середины диагоналей и середина отрезка с концами в точках пересечения боковых сторон произвольного четырёхугольника?

ГЛ1◇3. Дана замкнутая ломаная с нечётным числом вершин. Обозначим через $s_1, s_2, \dots, s_m$ середины её последовательных сторон, через x_0 — произвольную точку, а через x_i — результат центрально симметричного отражения точки x_{i-1} относительно точки s_i, где $i = 1, 2, \dots, m$. Всегда ли середина отрезка $[x_0, x_m]$ является вершиной данной ломаной?

ГЛ1◇4 (группирование масс). Пусть набор точек p_i с весами μ_i и набор точек q_j с весами ν_j имеют барицентры c_p и c_q соответственно, причём все три суммы $\sum \mu_i$, $\sum \nu_j$ и $\sum \mu_i + \sum \nu_j$ ненулевые. Совпадает ли барицентр объединения этих наборов[1] с барицентром пары точек c_p и c_q, взятых с весами $\sum \mu_i$ и $\sum \nu_j$?

ГЛ1◇5 (теорема Чевы). На проходящих через три неколлинеарные точки a, b, c прямых (bc), (ac) и (ab) отмечены точки $a_1 = \alpha_b b + \alpha_c c$, $b_1 = \beta_a a + \beta_c c$, $c_1 = \gamma_a a + \gamma_b b$. Покажите, что в точки a, b, c можно поместить веса α, β, γ так, чтобы центр тяжести точек a и b оказался в точке c_1, центр тяжести точек b и c — в точке a_1, а центр тяжести точек c и a — в точке b_1, если и только если $(\alpha_b\beta_c\gamma_a) : (\alpha_c\beta_a\gamma_b) = 1$. Выведите из этого необходимое и достаточное условие прохождения прямых (aa_1), (bb_1), (cc_1) через одну точку.

ГЛ1◇6 (теорема Менелая). Покажите, что лежащие на прямых (bc), (ca) и (ab) точки a_1, b_1 и c_1 коллинеарны если и только если $(\overrightarrow{a_1b} : \overrightarrow{a_1c}) \cdot (\overrightarrow{b_1c} : \overrightarrow{b_1a}) \cdot (\overrightarrow{c_1a} : \overrightarrow{c_1b}) = 1$.

ГЛ1◇7. Верно ли, что на аффинной плоскости $\mathbb{R}^2$

а) два выпуклых четырёхугольника переводятся друг в друга аффинным преобразованием если и только если у них одинаковы отношения, в которых соответственные друг другу диагонали делятся точкой своего пересечения

б) две трапеции переводятся друг в друга аффинным преобразованием если и только если у них одинаковые отношения оснований

в*) пятиугольник переводится аффинным преобразованием в правильный пятиугольник если и только если какие-то четыре его диагонали параллельны противолежащим им сторонам?

ГЛ1◇8*. Каждая сторона выпуклого четырёхугольника в $\mathbb{R}^2$ разделена на три равные части и соответственные точки деления на противоположных сторонах соединены так, что четырёхугольник разбивается на девять меньших четырёхугольников. Найдите отношение площади среднего из них к площади исходного четырёхугольника.

ГЛ1◇9*. Векторы $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^2$ идут из центра правильного n-угольника в его вершины, однако занумерованы случайно. Может ли удвоенная площадь этого n-угольника оказаться меньше суммы $\det(v_1, v_2) + \det(v_2, v_3) + \dots + \det(v_{n-1}, v_n) + \det(v_n, v_1)$?

[1] Объединение совпадающих точек заключается в сложении их весов.

Персональный табель ______________________________________. **Листок № 1 (03.09.2020)**

(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2а			
б			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
в			
8			
9			