§20. Пучки квадрик

В этом параграфе мы по умолчанию считаем, что поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто и $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$.

20.1. Базисное множество и спектр. Напомню[1], что прямые в пространстве квадрик $\mathbb{P}(S^2V^*)$ на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ называются *пучками квадрик*. Такой пучок $(Q_0Q_1) \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$ однозначно задаётся любой парой различных лежащих в нём квадрик $Q_0 = V(q_0)$, $Q_1 = V(q_1)$ и состоит из всех квадрик вида

$$Q_\lambda = V(\lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1) = \{v \in \mathbb{P}(V) \mid \lambda_0 q_0(v) + \lambda_1 q_1(v) = 0\}\,, \quad \text{где} \quad \lambda = (\lambda_0 : \lambda_1) \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\Bbbk^2)\,. \tag{20-1}$$

Пересечение базисных квадрик $B = Q_0 \cap Q_1$ называется *базисным множеством* пучка. Поскольку каждая квадрика из пучка (20-1) проходит через B, базисное множество является пересечением всех квадрик пучка и не зависит от выбора базисных квадрик Q_0, Q_1 на прямой (Q_0Q_1). Многочлен

$$\chi_{(q_0q_1)}(t_0, t_1) \overset{\text{def}}{=} \det(t_0q_0 + t_1q_1) \in \Bbbk[t_0, t_1] \tag{20-2}$$

называется *характеристическим многочленом* пучка (20-1). Это однородный многочлен степени $n+1$ от $t = (t_0 : t_1)$. В отличие от базисного множества, характеристический многочлен (20-2) *зависит* от выбора базисных квадрик Q_0, Q_1, и даже их уравнений q_0, q_1. При переходе к другим двум базисным квадрикам в том же самом пучке или умножении их уравнений на константы переменные $(t_0 : t_1)$ подвергаются обратимому линейному преобразованию. Поэтому алгебраическим инвариантом пучка является не сам многочлен (20-2), а только его класс по модулю обратимой линейной замены переменных.

Пучок квадрик называется *невырожденным*, если в нём есть хоть одна гладкая квадрика. Это означает, что характеристический многочлен (20-2) отличен от нуля хотя бы в одной точке на $\mathbb{P}_1$ и, в частности, является ненулевым многочленом. Поэтому в невырожденном пучке квадрик на $\mathbb{P}_n$ может быть не более $n+1$ особых квадрик, причём вершинные подпространства никаких двух из них не пересекаются, так вектор, лежащий в ядре сразу двух корреляций $\hat{q}_0, \hat{q}_1$, лежит в ядре и любой их линейной комбинации $\lambda_0\hat{q}_0 + \lambda_1\hat{q}_1$, что означает вырожденность сразу всех квадрик пучка.

Множество вырожденных квадрик в невырожденном пучке (20-1) называют *спектром* этого пучка. Квадратичные формы $\lambda_0q_0 + \lambda_1q_1$, задающие квадрики из спектра, биективно соответствуют корням $\lambda = (\lambda_0 : \lambda_1)$ характеристического многочлена (20-2). Будем называть *кратностью* $\operatorname{mult}Q_\lambda$ вырожденной квадрики Q_λ, отвечающей корню λ характеристического многочлена (20-2), кратность $\operatorname{mult}(\lambda)$ этого корня, т. е. максимальное такое $k \in \mathbb{N}$, что многочлен (20-2) делится в кольце многочленов $\Bbbk[t_0, t_1]$ на $\det^k(\lambda, t) = (t_1\lambda_0 - t_0\lambda_1)^k$. Также положим по определению кратности всех гладких квадрик пучка равными нулю.

Над алгебраически замкнутым полем спектр невырожденного пучка квадрик на $\mathbb{P}_n$ состоит ровно из $n+1$ квадрик с учётом их кратностей. Рассматриваемый как неупорядоченный набор из $n+1$ не обязательно различных точек на $\mathbb{P}_1$ с точностью до дробно линейного автоморфизма $\mathbb{P}_1$, он не зависит от выбора базиса в пучке.

Лемма 20.1
Кратность $\operatorname{mult}S$ каждой особой квадрики S из невырожденного пучка строго больше размерности $\dim\operatorname{Sing}S$ пространства её особых точек.

[1]См. n° 17.6 на стр. 219.

Доказательство. Пусть квадрика $G \subset \mathbb{P}_n$ неособа, а квадрика $S \subset \mathbb{P}_n$ имеет $\dim \operatorname{Sing} S = k$. Это означает, что её матрица Грама имеет $\operatorname{rk} S = (n+1) - (k+1) = n - k$, и все миноры порядка $n-k+1$ и выше в ней — нулевые. Согласно прим. 9.2 на стр. 115, характеристический многочлен

$$\det(t_0 S + t_1 G) = \sum_{m=0}^{n+1} t_0^m t_1^{n+1-m} \cdot \sum_{\#I=\#J=m} s_{IJ} g_{\hat{I}\hat{J}} \tag{20-3}$$

делится на t_1^{k+1}. Поэтому кратность задающей S точки $t = (1 : 0) \in \mathbb{P}_1$ не менее $k+1$. $\square$

20.2. Невырожденные пучки коник. Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ невырожденный пучок коник на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ может содержать 1, 2 или 3 различных особых коники, а его базисное множество конечно и может состоять из 1, 2, 3 или 4 различных точек. Если в пучке есть двойная прямая, то все его базисные точки лежат на этой прямой. Если в пучке есть распавшаяся коника $\ell_1 \cup \ell_2$, то все базисные точки такого пучка лежат на $\ell_1 \cup \ell_2$, причём на каждой из прямых ℓ_1, ℓ_2 должна быть хотя бы одна базисная точка, так как любая гладкая коника пучка пересекает каждую из этих прямых.

20.2.1. Пучок с одной базисной точкой. Если базисное множество пучка состоит из единственной точки p, особой коникой в нём может быть лишь двойная прямая, касающаяся любой гладкой коники пучка в точке p. Наоборот, любая гладкая коника C и касающаяся её в произвольной точке $p \in C$ двойная прямая ℓ задают регулярный пучок коник с единственной базисной точкой p, и единственной особой коникой — двойной прямой ℓ. Все гладкие коники этого пучка пересекаются друг с другом по единственной точке p и имеют в ней общую касательную см. рис. 20◇1.

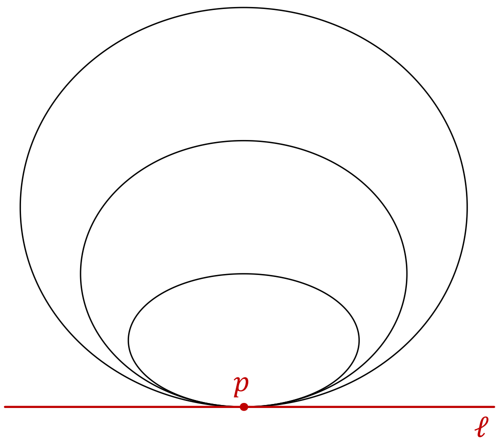

Рис. 20◇1. Пучок с одной базисной точкой ($a = b = c = d = p$).

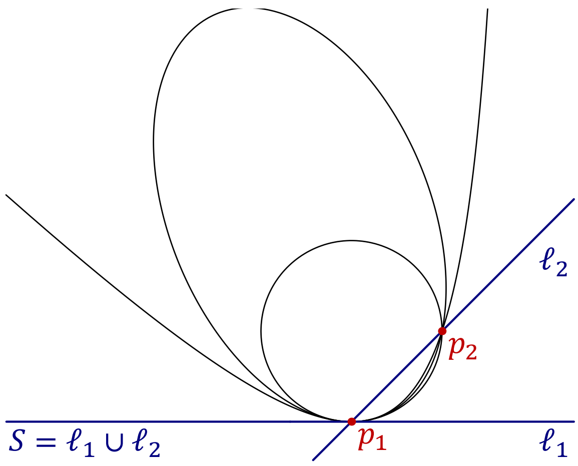

Рис. 20◇2. Пучок с двумя базисными точками $p_1 = a = b = c$, $p_2 = d$ и одной вырожденной коникой S.

20.2.2. Пучки с двумя базисными точками. Если базисное множество пучка состоит из двух точек p_1, p_2, то вырожденными кониками в нём могут или двойная прямая $\ell = (p_1 p_2)$ или такая распавшаяся коника $\ell_1 \cup \ell_2$, что $p_1 \in \ell_1$, $p_2 \in \ell_2$. Второй случай разделяется на два подслучая: либо обе точки p_1, p_2 отличны от особой точки $\ell_1 \cap \ell_2$, как на рис. 20◇3, либо точка $p_1 = \ell_1 \cap \ell_2$, а точка $p_2 \neq \ell_1 \cap \ell_2$, как на рис. 20◇2.

Если имеет место последнее, то распавшаяся коника $\ell_1 \cap \ell_2$ является единственной особой коникой в пучке, а каждая гладкая коника пучка касается прямой ℓ_1 в точке p_1 и проходит через точку p_2, см. рис. 20◇2. В частности, любые две гладкие коники в таком пучке пересекаются ровно по двум точкам p_1, p_2 и имеют в точке p_1 общую касательную.

Двойная прямая $\ell = (p_1p_2)$ и распавшаяся коника $\ell_1 \cup \ell_2$ с $p_1 \in \ell_1 \smallsetminus \ell_2$, $p_2 \in \ell_2 \smallsetminus \ell_1$ возникают в пучке с двумя базисными точками p_1, p_2 только одновременно в силу следующей леммы.

Лемма 20.2

Коники, касающиеся двух заданных прямых ℓ_1, ℓ_2 в двух заданных точках $p_1 \in \ell_1$, $p_2 \in \ell_2$, отличных от $\ell_1 \cap \ell_2$, составляют пучок. Этот пучок содержит ровно две вырожденные коники: двойную прямую $\ell = (p_1p_2)$ и распавшуюся конику $\ell_1 \cup \ell_2$, причём прямые ℓ_1 и ℓ_2 однозначно восстанавливаются по двойной прямой (p_1p_2) и любой гладкой конике C из пучка как касательные к C в точках пересечения C с (p_1p_2).

Доказательство. Каждый ненулевой вектор $p \in V$ задаёт сюрьективное линейное отображение

$$S^2V^* \twoheadrightarrow V^*, \quad q \mapsto \hat{q}(p), \tag{20-4}$$

переводящее квадратичную форму q в ковектор

$$\hat{q}(p) : V \to \Bbbk, \quad v \mapsto \tilde{q}(v, p).$$

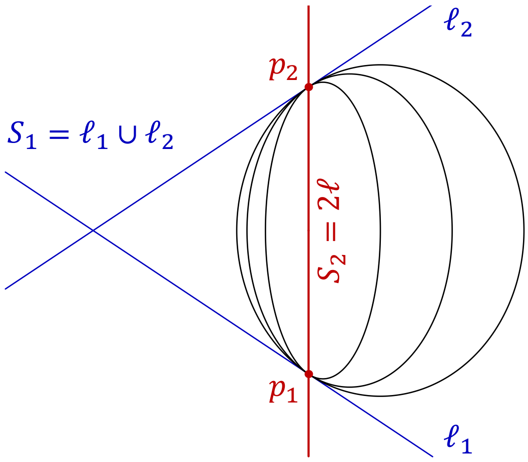

Рис. 20◇3. Пучок с двумя базисными точками $p_1 = a = b$, $p_2 = c = d$ и двумя вырожденными кониками S_1, S_2.

Так как $\dim V = 3$, ядро отображения (20-4) имеет размерность $\dim S^2V^* - \dim V^* = 3$. Поэтому полный прообраз любого одномерного подпространства $\xi \subset V^*$ при отображении (20-4) имеет размерность 4, а его проективизация имеет коразмерность 2 в пространстве коник. Беря вектор p на прямой $\ell = \operatorname{Ann} \xi$, мы заключаем, что коники, касающиеся этой прямой в точке p, образуют в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$ проективное подпространство коразмерности 2. Два таких подпространства, отвечающие $p_1 \in \ell_1$ и $p_2 \in \ell_2$, пересекаются как минимум по прямой. Если бы их пересечение содержало плоскость, то в пространстве коник, касающихся ℓ_1 и ℓ_2 в точках p_1 и p_2, нашлась бы коника, проходящая через любые две наперёд заданные точки. Но такая коника, проходящая через отличную от p_1 и p_2 точку прямой ℓ и ещё какую-нибудь точку вне прямых ℓ, ℓ_1, ℓ_2, распадается в объединение прямой ℓ и ещё одной прямой ℓ', отличной от ℓ, ℓ_1, ℓ_2. Поэтому она не может пересекать прямые ℓ_1, ℓ_2 с кратностью 2 одновременно и в p_1, и в p_2. Это доказывает первое утверждение леммы. Остальные утверждения очевидны из рис. 20◇3. □

20.2.3. Пучок с тремя базисными точками. Если базисное множество пучка коник состоит из трёх точек p_1, p_2, p_3, то они не коллинеарны[1]. В частности, такой пучок не содержит двойных

[1] Иначе содержащая базисные точки прямая пересекала бы любую гладкую конику пучка по трём точкам.

прямых. Кроме того, ни одна из точек p_i не может быть особой одновременно для двух распавшихся коник из пучка[1]. Каждая распавшаяся коника $\ell_1 \cup \ell_2$ из такого пучка проходит через базисные точки либо так, что $p_1 = \ell_1 \cap \ell_2$, $p_2 \in \ell_1 \smallsetminus \ell_2$, $p_3 \in \ell_2 \smallsetminus \ell_1$, либо так, что $p_1 \in \ell_1 \smallsetminus \ell_2$, а $p_2, p_3 \in \ell_2 \smallsetminus \ell_1$. На рис. 20◇4 ниже первое отвечает прямым ℓ_1', ℓ_2', второе — прямым ℓ_1'', ℓ_2''. Во втором случае любая гладкая коника C из пучка касается прямой ℓ_1 в точке p_1.

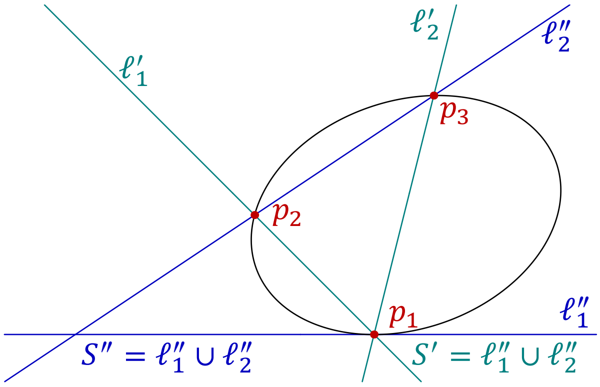

Рис. 20◇4. Пучок с тремя базисными точками $p_1 = a = b$, $p_2 = c$, $p_3 = d$ и двумя вырожденными кониками S_1, S_2.

В первом случае все гладкие коники пучка имеют в точке p_1 общую касательную, поскольку проходящая через p_1 прямая ℓ, касающаяся фиксированной гладкой коники C из пучка в точке $p_1 \in C$, соприкасается в точке p_1 с каждой коникой пучка, порождённого коникой C и распавшейся коникой $\ell_1'' \cup \ell_2''$, которая тоже касается прямой ℓ в точке $p_1 = \ell_1'' \cap \ell_2''$.

Упражнение 20.1. Убедитесь в этом и покажите, что множество всех коник $C \subset \mathbb{P}_2$, касающихся заданной прямой ℓ в заданной точке $p \in \ell$ и проходящих через две другие различные заданные точки $c, d \notin \ell$, составляют пучок, содержащий ровно две вырожденные коники: $(cd) \cup \ell$ и $(pc) \cup (pd)$.

20.2.4. Простой пучок коник. Пучок коник, спектр которого состоит из трёх разных точек, называется *простым*. По лем. 20.1 все точки спектра простого пучка имеют кратность 1, и по предыдущему базисное множество такого пучка состоит из четырёх различных точек a, b, c, d, никакие 3 из которых не коллинеарны.

Упражнение 20.2. Покажите, что множество всех коник, проходящих через четыре различные точки a, b, c, d, никакие три из которых не коллинеарны, представляет собою простой пучок, три особые коники которого суть пары противоположных сторон четырёхвершинника $abcd$, как на рис. 20◇5 на стр. 254.

Таким образом, простой пучок коник однозначно определяется своими базисными точками a, b, c, d. В однородных координатах $x = (x_0 : x_1 : x_2)$ на $\mathbb{P}_2$ уравнения его коник имеют вид

$$\frac{\det(x, a, b) \cdot \det(x, c, d)}{\det(x, a, d) \cdot \det(x, b, c)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1},$$

где $\lambda = (\lambda_0 : \lambda_1)$ пробегает $\mathbb{P}_1$. Все предыдущие примеры являются вырождениями простого пучка и получаются из него, когда некоторые из базисных точек слипаются друг с другом. А именно, пучок на рис. 20◇4 возникает при $a, b \to p_1$, $c = p_2$, $d = p_3$, пучок на рис. 20◇3 —

[1]Иначе все коники пучка были бы особы в этой точке, см. n° 20.1.

когда $a, b \to p_1$, $c, d \to p_2$, пучок на рис. 20◇2 — если $a, b, c \to p_1$, $d = p_2$, а на рис. 20◇1 все четыре базисные точки схлопываются в одну.

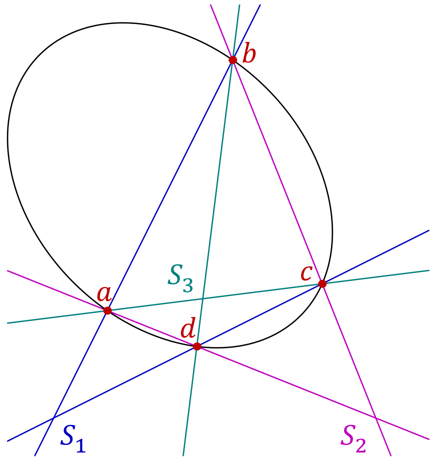

Рис. 20◇5. Простой пучок.

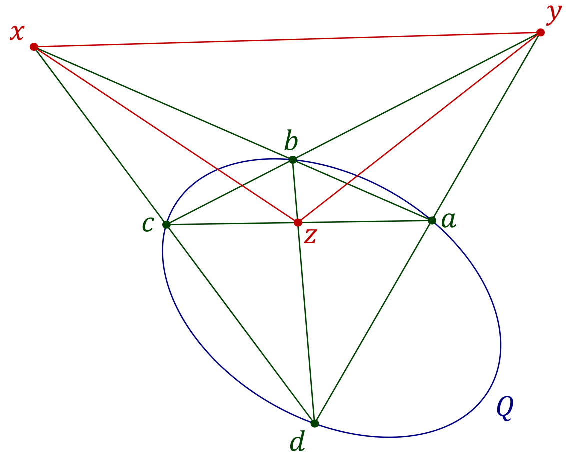

Рис. 20◇6. Автополярный $\triangle xyz$.

Предложение 20.1

Ассоциированный с четырёхвершинником $abcd$ треугольник xyz автополярен относительно всех гладких коник, описанных около этого четырёхвершинника.

Доказательство (по В. С. Жгуну). Каждая описанная около четырёхвершинника $abcd$ коника $C = V(q)$ лежит в простом пучке, порождённом любыми двумя из трёх распавшихся коник

$$S_x = V(f_x) = (ab) \cup (cd)\,, \quad S_y = V(f_y) = (ad) \cup (bc)\,, \quad S_z = V(f_z) = (ac) \cup (bd)\,.$$

Поскольку $x = \operatorname{Sing} S_x = \ker \hat{f}_x$, мы имеем равенства $\tilde{f}_x(y, x) = \tilde{f}_x(z, x) = 0$. Аналогично, $\tilde{f}_y(x, y) = \tilde{f}_y(z, y) = 0$ и $\tilde{f}_z(x, z) = \tilde{f}_z(y, z) = 0$. Так как билинейная форма $\tilde{q}$ является линейной комбинацией билинейных форм $\tilde{f}_x$ и $\tilde{f}_y$, из равенств $\tilde{f}_x(x, y) = \tilde{f}_y(x, y) = 0$ вытекает равенство $\tilde{q}(x, y) = 0$. Аналогично получаем равенства $\tilde{q}(x, z) = 0$ и $\tilde{q}(y, z) = 0$, см. рис. 20◇6. □

Упражнение 20.3. Получите из предл. 20.1 обоснование построения Штейнера[1].

Пример 20.1 (инволюция Дезарга)

Будем называть прямую $\ell \subset \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ *общей* по отношению к невырожденному пучку коник $L \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$, если она не проходит через базисные точки пучка и не содержится ни в одной из особых коник пучка. Каждый невырожденный пучок коник L задаёт на любой общей по отношению к нему прямой ℓ *инволюцию Дезарга* $\sigma_L : \ell \xrightarrow{\sim} \ell$, переставляющую точки $s, t \in \ell$ если и только если в пучке L имеется такая коника C, что $C \cap \ell = \{s, t\}$. В самом деле, для любой точки $t \in \ell$ в пучке L имеется ровно одна коника C, проходящая через t, причём коэффициенты её уравнения рационально зависят от координат точки t, и она пересекает прямую ℓ по одной или двум точкам. Таким образом, точка s определяется точкой t однозначно, а её координаты рационально зависят от координат точки t, и наоборот. Точка $p \in \ell$ неподвижна относительно инволюции Дезарга если и только если в пучке L имеется коника, касающаяся прямой ℓ в точке p. Следовательно, над алгебраически замкнутым полем в любом пучке коник имеется ровно две коники, касающиеся заданной общей по отношению к этому пучку прямой.

---

[1] См. упр. 18.10 на стр. 235.

Если L — простой пучок с базисными точками a, b, c, d, как на рис. 20◇6, то беря в качестве прямой ℓ сторону yz ассоциированного с четырёхвершинником $abcd$ треугольника xyz, мы получаем на прямой ℓ инволюцию с неподвижными точками y и z, которые являются точками касания ℓ с особыми кониками $(ad) \cup (cb)$ и $(ac) \cup (bd)$ соответственно. Эта инволюция переставляет между собою точки пересечения прямой ℓ со сторонами (ad) и (bc) четырёхвершинника $abcd$. Мы получили альтернативное доказательство того, что в пучке прямых, проходящих через x стороны треугольника гармоничны сторонам четырёхвершинника[1].

Пример 20.2 (коника полюсов и коника одиннадцати точек)
Каждая точка $a \in \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$, которая не является особой ни для какой коники из невырожденного пучка $L \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$, задаёт линейное вложение $a : L \hookrightarrow \mathbb{P}_2^\times = \mathbb{P}(V^*)$, переводящее конику $Q = V(q) \in L$ в поляру $\overline{q}(a)$ точки a относительно этой коники. На языке линейной алгебры это вложение является проективизацией инъективного линейного отображения[2], переводящего квадратичную форму q из двумерного пространства, проективизацией которого является пучок L, в линейную форму $\hat{q}(a) : V \to \mathbb{k}, v \mapsto \tilde{q}(v, a)$, где $a \in V$ — произвольно зафиксированный ненулевой вектор, представляющий точку $a \in \mathbb{P}(V)$. Аннулятором двумерного образа такого отображения является одномерное подпространство $a_L \subset V$ — центр пучка прямых, полярных точке a относительно всевозможных коник из L. На геометрическом языке точка $a_L \in \mathbb{P}(V)$ — это единственная точка плоскости, сопряжённая точке a сразу относительно всех коник из L. Отображение $a : L \xrightarrow{\sim} a_L^\times$ задаёт гомографию между пучком коник L и пучком прямых $a_L^\times$ на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$.

Если прямая $\ell = (st)$ не проходит через особые точки коник из пучка L, то полюса этой прямой относительно коник из L суть точки пересечения пар соответственных прямых из пучков $s_L^\times$ и $t_L^\times$ при гомографии $ts^{-1} : s_L^\times \xrightarrow{\sim} t_L^\times$, которая является композицией гомографии $t : L \xrightarrow{\sim} t_L^\times$ и гомографии, обратной к $s : L \xrightarrow{\sim} s_L^\times$. Согласно предл. 18.2 на стр. 228 ГМТ пересечения таких соответственных прямых является коникой, проходящей через точки s_L и t_L. Мы будем называть её *коникой полюсов* прямой ℓ относительно пучка коник L и обозначать $C(\ell, L)$.

Упражнение 20.4. Убедитесь, что если прямая ℓ не проходит через особые точки коник пучка L, то коника полюсов $C(\ell, L)$ является гладкой.

Для простого пучка L с базисными точками a, b, c, d и прямой ℓ, которая не проходит через базисные точки и вершины ассоциированного с ними треугольника xyz, коника полюсов $C(\ell, L)$ — это единственная гладкая коника, описанная вокруг $\triangle\, xyz$ и проходящая через две неподвижные точки инволюции Дезарга[3] $\sigma_L : \ell \xrightarrow{\sim} \ell$, задаваемой пучком L на прямой ℓ. Кроме этих пяти точек, коника полюсов проходит через такую точку $p_{ab} \in (ab)$, что $[p_{ab}, \ell \cap (ab), a, b] = -1$ на прямой (ab), так как эта точка по предл. 19.1 на стр. 237 сопряжена на прямой (ab) точке $\ell \cap (ab)$ относительно любой гладкой коники, проходящей через a и b, и потому именно она является второй, отличной от x точкой пересечения прямой (ab) с коникой полюсов прямой ℓ. По той же причине $C(\ell, L)$ проходит ещё через пять аналогичных p_{ab} точек $p_{uw} \in (uw)$, отвечающих всевозможным двухэлементным подмножествам $\{u, w\} \subset \{a, b, c, d\}$. Поэтому такую конику полюсов называют ещё и *коникой одиннадцати точек* прямой ℓ и четырёхвершинника $abcd$.

20.3. Касательное пространство к проективной гиперповерхности. Рассмотрим проективную гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{P}_n$, заданную однородным многочленом f степени d, и не лежа-

[1] Ср. с n° 18.3.2 на стр. 231.

[2] Ср. с доказательством лем. 20.2 на стр. 252.

[3] См. прим. 20.1 на стр. 254.

щую на ней прямую $(ab) \subset \mathbb{P}_n$, проходящую через точку $a \in V(f)$. Ограничение многочлена f на прямую (ab) является ненулевым однородным многочленом степени d

$$f_{ab}(\lambda, \mu) \overset{\text{def}}{=} f(\lambda a + \mu b)$$

от однородной координаты $(\lambda : \mu)$ на прямой (ab), и точка $a = (1 : 0)$ является его корнем. Кратность этого корня называется *кратностью пересечения* прямой (ab) с гиперповерхностью $V(f)$ в точке a. Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ каждая не лежащая на гиперповерхности $V(f)$ прямая пересекает эту гиперповерхность ровно по d точкам, учитываемым с кратностями, равными кратностям пересечения прямой и гиперповерхности в этих точках.

Прямая (ab) называется *касательной* к гиперповерхности $V(f)$ в точке $a \in V(f)$, если она лежит на этой гиперповерхности или пересекает её в точке a с кратностью $\geqslant 2$. Объединение всех прямых, касающихся гиперповерхности $V(f)$ в точке $a \in V(f)$, называется *касательным пространством* к гиперповерхности f в точке a и обозначается $T_aV(f)$.

Минимальная из кратностей пересечений гиперповерхности $V(f)$ со всевозможными проходящими через точку $a \in V(f)$ прямыми называется *кратностью точки* a на гиперповерхности $V(f)$. Если она равна единице, точка a называется *гладкой*, если больше единицы — *особой*. Таким образом, особость точки $a \in V(f)$ равносильна тому, что $T_aV(f) = \mathbb{P}_n$.

Лемма 20.3

Точка $a \in V(f)$ особа если и только если все частные производные от многочлена f зануляются в точке a. Если точка a не особа, то касательное пространство $T_aV(f)$ является проективным подпространством коразмерности 1 и задаётся однородным линейным уравнением

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot x_i = 0\,.$$

Доказательство. По формуле Тейлора ограничение многочлена f на прямую (ab) имеет в аффинной окрестности точки a вид

$$f(a + tb) = f(a) + t \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot b_i + \text{члены, делящиеся на } t^2\,.$$

Точке a отвечает корень $t = 0$. Он кратный тогда и только тогда, когда $\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot b_i = 0$. □

Упражнение 20.5. Убедитесь, что для квадрик критерий гладкости и описание касательного пространства из лем. 20.3 согласуются с определением гладкости из n° 17.3 на стр. 211 и описанием касательного пространства из n° 17.3.1.

20.4. Гиперповерхность особых квадрик. Множество всех особых квадрик на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ образует в пространстве квадрик $\mathbb{P}(S^2V^*)$ алгебраическую гиперповерхности степени $(n + 1)$

$$\Sigma = V(\det) = \{q \in S^2V^* \mid \det(q) = 0\}\,. \tag{20-5}$$

Предложение 20.2

Особая квадрика $S \in \Sigma$ является гладкой точкой гиперповерхности Σ если и только если сама квадрика $S \subset \mathbb{P}(V)$ имеет единственную особую точку $s \in S$, и в этом случае касательное пространство $T_S\Sigma \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$ состоит из всех квадрик $Q \subset \mathbb{P}(V)$, проходящих через точку s.

Доказательство. Пусть $S = V(f)$. Для любой квадрики $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$ ограничение многочлена $\det$ на прямую $(SQ) \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$ имеет в аффинной окрестности точки S вид[1]

$$0 = \det(f + tq) = \det(f) + t \cdot \sum_{ij} q_{ij} f_{ij}^{\vee} + \text{члены, делящиеся на } t^2\,,$$

где $f_{ij}^{\vee}$ означает алгебраическое дополнение к (ij)-тому элементу матрицы Грама квадратичной формы f. Квадрика S отвечает корню $t = 0$. Он кратный тогда и только тогда, когда

$$\sum_{ij} q_{ij} f_{ij}^{\vee} = 0\,. \tag{20-6}$$

Это линейное уравнение на q нетривиально если и только если в матрице Грама $F = \big(f_{ij}\big)$ имеется хоть один ненулевой минор порядка n, т. е. когда $\dim\ker F = 1$. Каждый столбец и каждая строка присоединённой матрицы $F^{\vee} = (f_{ij}^{\vee})$ лежит в ядре матрицы F, поскольку $F\,F^{\vee} = F^{\vee}\,F = \det(F)\,E = 0$. Таким образом, $\operatorname{rk} F^{\vee} = 1$, и все строки и все столбцы симметричной матрицы $F^{\vee}$ пропорциональны однородным координатам особой точки

$$s = (s_0 : s_1 : \;\dots\; : s_n) = (f_{i0}^{\vee} : f_{i1}^{\vee} : \dots : f_{in}^{\vee}) = (f_{0j}^{\vee} : f_{1j}^{\vee} : \dots : f_{nj}^{\vee})$$

квадрики S. Это означает, что с точностью до умножения на независящую от i, j константу $f_{ij}^{\vee} = s_i s_j$, и условие касания (20-6) превращается в равенство $\sum_{ij} q_{ij} s_i s_j = q(s) = 0$, т. е. в условие прохождения квадрики Q через точку s. □

Следствие 20.1

Прямая $(PQ) \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$ касается гиперповерхности особых квадрик Σ в точке $Q \in \Sigma$ если и только если $P \cap \operatorname{Sing} Q \neq \varnothing$. Если же $\operatorname{Sing} P \cap \operatorname{Sing} Q \neq \varnothing$, то прямая (PQ) лежит на Σ.

Доказательство. Если Q является гладкой точкой гиперповерхности Σ, то первое утверждение является переформулировкой предл. 20.2. Если точка $Q \in \Sigma$ особа, то $\dim \operatorname{Sing} Q \geqslant 1$, и любая лежащая в $\operatorname{Sing} Q$ прямая пересекает любую квадрику P, а любая прямая (PQ) касается гиперповерхности Σ в точке Q, т. е. первое утверждение является в этом случае тавтологией. Если $\operatorname{Sing} P \cap \operatorname{Sing} Q \neq \varnothing$, то все квадрики пучка (PQ) особы в точках пересечения $\operatorname{Sing} P \cap \operatorname{Sing} Q$, поскольку ненулевой вектор, лежащий в ядре корреляций, отвечающих квадрикам P и Q, лежит в ядре и любой линейной комбинации этих корреляций. □

Упражнение 20.6. Приведите пример пучка L особых коник, в котором $\operatorname{Sing} P \cap \operatorname{Sing} Q = \varnothing$ для всех $P, Q \in L$.

Пример 20.3 (классификация невырожденных пучков коник)

При $n = 2$ особые коники на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ образуют кубическую гиперповерхность в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$

$$\Sigma = \{q \in \mathbb{P}_5 \mid \det q = 0\}\,.$$

Гладкими точками гиперповерхности Σ являются распавшиеся коники, а особыми точками гиперповерхности Σ являются двойные прямые. Прямая общего положения $L \subset \mathbb{P}_5$ трансверсально пересекает гиперповерхность Σ в трёх её гладких точках и представляет собою простой пучок

[1] См. прим. 9.2 на стр. 115.

коник, как на рис. 20◇5 на стр. 254. Если прямая L касается Σ в гладкой точке $S = \ell_1 \cup \ell_2$, то она либо больше нигде не пересекает Σ, и в этом случае кратность пересечения Σ с L в точке S равна 3, либо пересекает Σ с кратностью 1 ещё ровно в одной, автоматически гладкой точке. Эти случаи реализуются пучками коник, представленными на рис. 20◇2 на стр. 251 и рис. 20◇4 на стр. 253, причём точке касания L с Σ всегда отвечает распавшаяся коника с особенностью в базисной точке пучка. Если прямая L проходит через особую точку $S = 2\ell$ гиперповерхности Σ, возникает та же альтернатива: если кратность пересечения Σ и L в точке S равна 3, то L больше нигде не пересекает Σ и выгладит как на рис. 20◇1 на стр. 251, если же эта кратность 2, то L пересекает Σ ещё ровно в одной гладкой точке с кратностью 1, как на рис. 20◇3 на стр. 252.

20.5. Регулярные пучки квадрик. Невырожденный пучок квадрик $(Q_0 Q_1)$ на $\mathbb{P}_n$ называется *регулярным*, если кратность каждой точки его спектра ровно на единицу больше размерности пространства особых точек отвечающей этой точке особой квадрики, т. е. когда

$$\dim \operatorname{Sing}(Q_\lambda) = \operatorname{mult}(\lambda) - 1 \quad \text{для всех} \quad \lambda = (\lambda_0 : \lambda_1) \in \mathbb{P}_1 .$$

Это означает, что ранг матрицы Грама $\lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1$ в каждой точке $\lambda \in \mathbb{P}_1$ падает в точности на кратность корня $t = \lambda$ характеристического многочлена $\chi_{q_0,q_1}(t_0,t_1) = \det(t_0 q_0 + t_1 q_1)$. Из всех рассмотренных в n° 20.2 невырожденных пучков коник регулярными являются только пучки, представленные на рис. 20◇5 и рис. 20◇3.

Теорема 20.1
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ для любого регулярного пучка квадрик в $\mathbb{P}(V)$ найдётся такой базис пространства V, в котором матрицы Грама всех квадрик из пучка одновременно диагональны.

Доказательство. Пусть пучок порождается квадриками $V(g)$ и $V(f)$, где форма g неособа. Следуя рецепту из n° 14.2.4 на стр. 176, сопоставим форме f автодуальный[1] относительно скалярного произведения $\widetilde{g}$ на V линейный оператор $\varphi = \widehat{g}^{-1}\hat{f} : V \to V$, однозначно задающийся тем, что $\widetilde{g}(u, \varphi w) = \tilde{f}(u, w)$ для всех $u, w \in V$. Поскольку матрица Φ оператора φ выражается через матрицы Грама G, F квадратичных форм g, f по формуле $\Phi = G^{-1}F$, характеристический многочлен $\chi_\varphi(t) = \det(tE - \Phi) = \det(tE - G^{-1}F) = \det G^{-1} \det(tG - F)$ оператора φ связан с характеристическим многочленом $\chi_{(gf)}(t_0, t_1) = \det(t_0 G + t_1 F)$ пучка квадрик по формуле

$$\chi_\varphi(t) = \det G^{-1} \cdot \chi_{(fg)}(-t_0/t_1, 1) .$$

Поэтому квадратичная форма $F - \lambda G$ вырождена если и только если число $\lambda \in \Bbbk$ является собственным значением оператора φ. Так как ранг матрицы $\lambda G - F$ равен рангу матрицы $\lambda E - \Phi = G^{-1}(\lambda G - F)$, размерность собственного подпространства $V_\lambda = \ker(\lambda E - \Phi)$ оператора φ совпадает с размерностью ядра квадратичной формы $F - \lambda G$, которая по условию теоремы в точности равна кратности корня $(t_0 : t_1) = (-\lambda : 1)$ многочлена $\chi_{(gf)}(t_0, t_1)$. Таким образом, сумма размерностей собственных подпространств V_λ оператора φ равна $\dim V$. Поскольку по упр. 15.7 на стр. 194 все собственные подпространства самосопряжённого оператора ортогональны друг другу относительно скалярного произведения $\widetilde{g}$, пространство V является $\widetilde{g}$-ортогональной прямой суммой собственных подпространств V_λ оператора φ. Выбирая в каждом подпространстве V_λ ортогональный базис квадратичной формы g, мы получаем в V базис, где

[1] См. n° 15.6 на стр. 194.

обе формы g и f имеют диагональные матрицы Грама, причём на диагонали матрицы F будут стоять собственные значения оператора f или, что то же самое, взятые с обратным знаком характеристические числа t_0/t_1 пучка (GF). Все формы $\lambda g + \mu f$ также будут диагональны в этом базисе. □

Следствие 20.2 (из доказательства теор. 20.1)
Если квадратичная форма f на векторном пространстве V над произвольным полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ имеет диагональную матрицу Грама в ортонормальном базисе невырожденной квадратичной формы g, то диагональные элементы этой матрицы суть собственные числа линейного оператора $\varphi = \widehat{g}^{-1}\hat{f} : V \to V$, который однозначно задаётся тем, что $\tilde{f}(u, w) = \tilde{g}(u, \varphi w)$ для всех $u, w \in V$. При этом сам базис состоит из собственных векторов оператора φ, и количество появлений каждого собственного числа на диагонали матрицы Грама равно размерности соответствующего собственного подпространства. В частности, диагональная матрица Грама формы f с точностью до перестановки диагональных элементов не зависит от выбора базиса, одновременно ортонормального для g и ортогонального для f.

Теорема 20.2
Два регулярных пучка квадрик в $\mathbb{P}_n$ над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ переводятся один в другой линейным проективным автоморфизмом[1] $\mathbb{P}_n$ если и только если их спектры, понимаемые как неупорядоченные множества из n не обязательно различных точек на $\mathbb{P}_1$, переводятся друг в друга дробно линейным автоморфизмом $\mathbb{P}_1$.

Доказательство. Выберем в первом пучке гладкую квадрику $V(g')$ и рассмотрим в V базис $\boldsymbol{e}'$, в котором все квадрики первого пучка имеют диагональные матрицы Грама, причём нормируем его так, чтобы матрица Грама формы g' стала единичной. Рассмотрим любую отличную от g' форму f' из первого пучка и обозначим через F' её матрицу Грама в базисе $\boldsymbol{e}'$. В доказательстве теор. 20.1 мы видели, что диагональные элементы матрицы F' являются корнями многочлена $\det(tE - F')$, т. е. составляют в точности спектр первого пучка. Поскольку он совпадает со спектром второго пучка, во втором пучке квадратичных форм имеется базис из таких форм g'', f'', что корни многочлена $\chi_{g''f''}(t, 1)$ совпадают с корнями многочлена $\det(tE - F')$. Из этого вытекает, что форма g'' невырождена, и в пространстве V существует базис $\boldsymbol{e}''$, в котором матрица Грама формы g'' единичная, а форма f'' имеет диагональную матрицу F'' с диагональными элементами, равными корням многочлена $\det(tE - F')$. Таким образом, матрица F'' в базисе $\boldsymbol{e}''$ совпадает с матрицей F' в базисе $\boldsymbol{e}'$. Проективный изоморфизм $\mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n$, переводящий базис $\boldsymbol{e}'$ в базис $\boldsymbol{e}''$, преобразует базисные квадратичные формы g', f' первого пучка в базисные квадратичные формы g'', f'' второго. Следовательно, он преобразует каждую форму $\lambda g' + \mu f'$ первого пучка в форму $\lambda g'' + \mu f''$ второго. □

Пример 20.4 (простые пучки)
Пучок квадрик на $\mathbb{P}_n$ называется *простым*, если его спектр состоит из $(n + 1)$ различных точек на $\mathbb{P}_1$. Таким образом, каждая особая квадрика простого пучка имеет ровно одну особую точку и единичную кратность в спектре. В частности, каждый простой пучок регулярен, и все квадрики в нём одновременно диагонализуются в некотором базисе. Два простых пучка переводятся

[1] Т. е. существует такой линейный проективный автоморфизм $\mathbb{P}_n$, который биективно отображает квадрики одного пучка на квадрики второго.

один в другой проективным преобразованием тогда и только тогда, когда $n+1$ точек на $\mathbb{P}_1$, отвечающих особым квадрикам первого пучка, переводятся дробно линейным автоморфизмом $\mathbb{P}_1$ в $n+1$ точек, отвечающих особым квадрикам второго.

Теорема 20.3
Пучок квадрик (PQ) над алгебраически замкнутым полем прост если и только если его базисные квадрики пересекаются трансверсально, т. е. $\operatorname{codim} T_aP \cap T_aQ = 2$ в каждой точке $a \in P \cap Q$.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве квадрик $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^2V^*)$ на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ гиперповерхность особых квадрик[1] $\Sigma = V(\det) \subset \mathbb{P}_N$. Прямая $(PQ) \subset \mathbb{P}_N$ пересекает гиперповерхность Σ меньше, чем по $n+1$ точкам, если и только если она касается Σ в одной из точек $S \in (PQ) \cap \Sigma$. Нетрансверсальность пересечения квадрик $P = V(f)$ и $Q = V(q)$ в точке $a \in P \cap Q$ означает, что ковекторы $\hat f(a)$ и $\hat q(a)$ пропорциональны[2]. В этом случае все ковекторы $\hat h(a)$ с $\hat h = \lambda\hat p + \mu\hat q$ пропорциональны друг другу, т. е. любые две квадрики из пучка (PQ) пересекаются в точке a не трансверсально, и пучок содержит квадрику $S = V(h)$ с $\hat h(a) = \lambda\hat f(a) + \mu\hat q(a) = 0$, т. е. с $a \in \operatorname{Sing} S$. Тогда $P \cap \operatorname{Sing} S \neq \varnothing$ и прямая (PQ) касается гиперповерхности Σ в точке S по сл. 20.1. Значит, пучок не прост. Наоборот, если прямая (PQ) касается гиперповерхности Σ в точке S, то $P \cap \operatorname{Sing} S \neq \varnothing$ и пересечение $P \cap S$ не трансверсально во всех точках из $P \cap \operatorname{Sing} S$. Но тогда и пересечение $P \cap Q$ тоже не трансверсально в этих же точках в силу сделанного выше замечания. □

[1] См. формулу (20-5) на стр. 256.

[2] При этом один из них (но не оба) может обратится в нуль — это означает, что одна из квадрик особа в точке a.

Упр. 20.1. В доказательстве лем. 20.2 на стр. 252 мы видели, что коники, касающиеся прямой ℓ в точке $p \in \ell$, образуют в пространстве коник $\mathbb{P}_5$ подпространство коразмерности 2. Оно пересекается с двумя гиперплоскостями коник, проходящих через точки c, d по крайней мере по прямой. Если бы пересечение имело размерность хотя бы два, то через любые две точки на $\mathbb{P}_2$ проходила бы коника, одновременно содержащая точки c, d и касающаяся прямой ℓ в точке p, что не так: возьмём одну из точек на прямой (cd), а другую — вне $(cd) \cup \ell$. Описание особых коник в этом пучке очевидно.

Упр. 20.2. Условие прохождения через точку задаёт в пространстве коник гиперплоскость. Если никакие три из четырёх точек не коллинеарны, эти гиперплоскости линейно независимы, т. к. через любые три из точек можно провести распавшуюся конику, не проходящую через четвёртую точку. Следовательно, коники проходящие через точки a, b, c, d, никакие три из которых не коллинеарны, образуют пучок. Этот пучок содержит три распавшихся коники, образованные парами противоположных сторон четырёхвершинника $abcd$.

Упр. 20.4. По предл. 18.2 на стр. 228 коника $C(\ell, L)$ распадается в объединение прямой $\ell' = (s_L t_L)$ и ещё одной прямой если и только если гомография $ts^{-1} : s_L^\times \xrightarrow{\sim} t_L^\times$ переводит прямую ℓ' в себя. Последнее означает, что в пучке L имеется коника C, относительно которой прямая ℓ' одновременно является полярой и точки s и точки t. Но такое возможно только если $C = \ell \cup \ell'$, а в этом случае ℓ проходит через особую точку $\ell \cap \ell'$ коники C.

Упр. 20.6. Пучок распавшихся коник, являющихся объединением прямой, пробегающей пучок прямых, проходящих через некоторую точку p, и ещё одной прямой, не проходящей через p.