

§14. Пространство с билинейной формой

14.1. Билинейные формы. Отображение $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ называется *билинейной формой* на векторном пространстве V , если оно линейно по каждому из двух своих аргументов при фиксированном другом, т. е. удовлетворяет равенству

$$\beta(x_1 u_1 + x_2 u_2, y_1 w_1 + y_2 w_2) = \sum_{i,j=1}^2 x_i y_j \beta(u_i, w_j) \quad (14-1)$$

при всех $u_1, u_2, w_1, w_2 \in V$ и $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{k}$.

УПРАЖНЕНИЕ 14.1. Убедитесь, что билинейные формы образуют векторное подпространство в пространстве всех функций $V \times V \rightarrow \mathbb{k}$.

Если форма β на пространстве V зафиксирована, то её значение $\beta(u, w) \in \mathbb{k}$ на паре векторов $u, w \in V$ иногда бывает удобно записывать в виде *скалярного произведения* $u \cdot w$, принимающего значения в поле \mathbb{k} и, вообще говоря, некоммутативного. В таких обозначениях формула (14-1) утверждает, что это произведение дистрибутивно по отношению к линейным комбинациям векторов, т. е. подчиняется стандартным правилам раскрытия скобок:

$$(x_1 u_1 + x_2 u_2) \cdot (y_1 w_1 + y_2 w_2) = \sum_{i,j=1}^2 x_i y_j u_i \cdot w_j.$$

14.1.1. Матрицы Грама. Как и в евклидовом пространстве¹, в каждом пространстве с билинейной формой с любыми двумя наборами векторов $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$, где все $u_i, w_j \in V$, связана матрица их попарных скалярных произведений $B_{\mathbf{u}\mathbf{w}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{w} \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{k})$ с элементами $b_{ij} = v_i \cdot w_j = \beta(u_i, w_j)$. Она называется *матрицей Грама* наборов \mathbf{u} , \mathbf{w} и формы β . Когда наборы совпадают: $\mathbf{u} = \mathbf{w}$, мы пишем просто $B_{\mathbf{u}}$ вместо $B_{\mathbf{u}\mathbf{u}}$. В этом случае $\det B_{\mathbf{u}} \in \mathbb{k}$ называется *определителем Грама* формы β и набора векторов \mathbf{u} .

Если наборы векторов \mathbf{u} и \mathbf{w} линейно выражаются через наборы \mathbf{e} и \mathbf{f} по формулам $\mathbf{u} = \mathbf{e} C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}$ и $\mathbf{w} = \mathbf{f} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}}$, то $B_{\mathbf{u}\mathbf{w}} = \mathbf{u}^t \mathbf{w} = (\mathbf{e} C_{\mathbf{e}\mathbf{u}})^t (\mathbf{f} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}}) = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t \mathbf{e}^t \mathbf{f} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}} = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t B_{\mathbf{e}\mathbf{f}} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}}$. В частности, если $\mathbf{u} = \mathbf{w} C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$, то

$$B_{\mathbf{u}} = C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}^t B_{\mathbf{w}} C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}. \quad (14-2)$$

Если векторы $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ образуют базис в V , а векторы $\mathbf{u} = \mathbf{e} x$ и $\mathbf{w} = \mathbf{e} y$ заданы столбцами $x, y \in \mathbb{k}^n$ своих координат в этом базисе, то

$$\beta(u, w) = \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{w} = x^t \mathbf{e}^t \cdot \mathbf{e} y = x^t B_{\mathbf{e}} y. \quad (14-3)$$

Так как любая квадратная матрица $B_{\mathbf{e}} \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ задаёт по этой формуле билинейную форму на пространстве V , сопоставление билинейной форме её матрицы Грама в произвольно зафиксированном базисе устанавливает биекцию между пространством билинейных форм на n -мерном векторном пространстве V и пространством матриц размера $n \times n$.

УПРАЖНЕНИЕ 14.2. Убедитесь, что эта биекция линейна.

¹Ср. с п° 11.2 на стр. 134.

14.1.2. Корреляции. Задание билинейной формы $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ эквивалентно заданию линейного отображения *правой корреляции* $\beta^\wedge : V \rightarrow V^*$, сопоставляющего каждому вектору $v \in V$ линейный функционал $\beta^\wedge v : V \rightarrow \mathbb{k}$, который задаётся правым скалярным умножением на вектор v и является ограничением билинейного отображения $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ на подмножество $V \times \{v\} \subset V \times V$:

$$\beta^\wedge v : V \rightarrow \mathbb{k}, \quad u \mapsto u \cdot v = \beta(u, v). \quad (14-4)$$

УПРАЖНЕНИЕ 14.3. Убедитесь, что для каждого $v \in V$ функционал (14-4) линеен и линейно зависит от v .

Форма $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ однозначно восстанавливается по правой корреляции $\beta^\wedge : V \rightarrow V^*$ как

$$\beta(u, w) = \beta^\wedge w(u).$$

Если зафиксировать в V и V^* двойственные базисы $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $e^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$, то в этих базисах матрица $B_{e^*e}^\wedge$ линейного отображения $\beta^\wedge : V \rightarrow V^*$ имеет в клетке (i, j) значение i -той координаты функционала $\beta^\wedge e_j : u \mapsto \beta(u, e_j)$ в базисе e^* , которая равна¹ значению этого функционала на базисном векторе e_i , т. е. скалярному произведению $\beta(e_i, e_j)$. Таким образом, матрица правой корреляции $B_{e^*e}^\wedge = B_e$ совпадёт с матрицей Грама формы β в базисе e . Мы заключаем, что сопоставление билинейной форме β её правой корреляции β^\wedge устанавливает линейный изоморфизм пространства билинейных форм на V с пространством линейных отображений $V \rightarrow V^*$.

Симметричным образом, задание билинейной формы $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ эквивалентно заданию *левой корреляции* ${}^\wedge\beta : V \rightarrow V^*$, которая переводит каждый вектор $v \in V$ в линейный функционал ${}^\wedge\beta v : V \rightarrow \mathbb{k}$, получающийся ограничением отображения $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ на подмножество $\{v\} \times V \subset V \times V$ и задаваемый левым скалярным умножением на вектор v :

$${}^\wedge\beta v : V \rightarrow \mathbb{k}, \quad u \mapsto \beta(v, u) = v \cdot u. \quad (14-5)$$

Иначе можно сказать, что левая корреляция билинейной формы β является правой корреляцией для *транспонированной* формы $\beta^t(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(w, u)$, матрица Грама которой транспонирована к матрице Грама формы β . Поэтому матрица левой корреляции билинейной формы β в двойственных базисах e и e^* пространств V и V^* равна транспонированной матрице Грама B_e^t формы β в базисе e .

14.1.3. Ядра, ранг и коранг. Векторные пространства

$$\begin{aligned} V^\perp &= \ker \beta^\wedge = \{u \in V \mid \forall v \in V \beta(v, u) = 0\} \\ {}^\perp V &= \ker {}^\wedge\beta = \{u \in V \mid \forall v \in V \beta(u, v) = 0\} \end{aligned} \quad (14-6)$$

называются соответственно *правым* и *левым* ядром билинейной формы β . Если форма β не является симметричной или кососимметричной², то подпространства V^\perp и ${}^\perp V$, вообще говоря, различны. Тем не менее, их размерности всегда одинаковы и равны

$$\dim V^\perp = \dim {}^\perp V = \dim V - \text{rk } B_e, \quad (14-7)$$

¹См. н° 7.1.1 на стр. 85.

²Т. е. не удовлетворяет соотношениям $\beta^t = \pm\beta$. Мы подробнее поговорим о таких формах в н° 14.4 на стр. 179 ниже.

где B_e — матрица Грама формы β в произвольном базисе e пространства V , поскольку ранги¹ $\text{rk } B_e = \text{rk } B_e^t$ равны размерностям образов $\text{im } \beta^\wedge$ и $\text{im } {}^\wedge\beta$ операторов правой и левой корреляций, а $\dim \ker \beta^\wedge = \dim V - \dim \text{im } \beta^\wedge$ и $\dim \ker {}^\wedge\beta = \dim V - \dim \text{im } {}^\wedge\beta$. В частности, мы видим, что ранг матрицы Грама B_e , равный размерности образа каждой из корреляций, не зависит от выбора базиса. Он называется *рангом* билинейной формы β и обозначается $\text{rk } \beta$, а разность $\dim V - \text{rk } \beta$ из формулы (14-7) называется *корангом* формы β и обозначается $\text{corrk } \beta$.

14.1.4. Изометрии. Линейное отображение $f : U \rightarrow W$ между векторными пространствами U и W , на которых заданы билинейные формы β и γ , называется *изометрическим* или *гомоморфизмом пространств с билинейными формами*, если для любых векторов $u_1, u_2 \in U$ выполняется равенство $\beta(u_1, u_2) = \gamma(f(u_1), f(u_2))$. Билинейные формы β и γ называются *изоморфными*, если между пространствами U и W имеется изометрический линейный изоморфизм.

Если произвольно зафиксировать в U и W базисы $u = (u_1, \dots, u_n)$ и $w = (w_1, \dots, w_m)$, то отображение f с матрицей F_{wu} в этих базисах является изометрическим если и только если матрица Грама набора векторов $f(u) = (f(u_1), \dots, f(u_n)) = w F_{wu}$ равна матрице Грама базиса u . По форм. (14-2) на стр. 170 это равносильно матричному равенству

$$F_{wu}^t B_w F_{wu} = B_u. \quad (14-8)$$

14.2. Невырожденные формы. Билинейная форма β называется *невырожденной*², если она удовлетворяет условиям следующего ниже [предл. 14.1](#). Формы, не удовлетворяющие этим условиям, называются *вырожденными* или *особыми*.

Предложение 14.1 (критерии невырожденности)

Следующие свойства билинейной формы β на конечномерном векторном пространстве V равносильны друг другу:

- 1) в V существует базис с ненулевым определителем Грама
- 2) любой базис в V имеет ненулевой определитель Грама
- 3) левая корреляция $\beta^\wedge : V \rightarrow V^*$ является изоморфизмом
- 4) правая корреляция ${}^\wedge\beta : V \rightarrow V^*$ является изоморфизмом
- 5) для любого ненулевого вектора $v \in V$ существует такой вектор $u \in V$, что $\beta(v, u) \neq 0$
- 6) для любого ненулевого вектора $v \in V$ существует такой вектор $u \in V$, что $\beta(u, v) \neq 0$
- 7) для любой линейной функции $\varphi : V \rightarrow \mathbb{K}$ существует такой вектор $v \in V$, что

$$\varphi(u) = \beta(v, u) \quad \text{для всех } u \in V$$

- 8) для любой линейной функции $\varphi : V \rightarrow \mathbb{K}$ существует такой вектор $v \in V$, что

$$\varphi(u) = \beta(u, v) \quad \text{для всех } u \in V,$$

¹Напомним, что транспонированные матрицы имеют одинаковый ранг, см. [теор. 5.1](#) на стр. 67 и [прим. 7.5](#) на стр. 88.

²А также *неособой* или *регулярной*.

причём при выполнении этих условий вектор v в последних двух пунктах определяется формой φ однозначно.

Доказательство. Поскольку $\dim V = \dim V^*$, биективность, инъективность и сюръективность линейного отображения $V \rightarrow V^*$ равносильны друг другу и тому, что это отображение задаётся невырожденной матрицей в каких-нибудь базисах. Поэтому условия (3), (5), (7) и условия (4), (6), (8), утверждающие, соответственно, биективность, обращение в нуль ядра и сюръективность для операторов $\hat{\beta}$ и β^\wedge , равносильны между собой и условию (1), означающему, что транспонированные друг другу матрицы этих операторов обратимы. Условие (1) равносильно условию (2) в силу форм. (14-2) на стр. 170, из которой вытекает, что определители Грама двух базисов e и f связаны друг с другом по формуле $\det B_e = \det B_f \cdot \det^2 C_{fe}$, где C_{fe} — матрица перехода¹ от базиса e к базису f . \square

Пример 14.1 (евклидова форма)

Симметричная билинейная форма на координатном пространстве \mathbb{k}^n с единичной матрицей Грама E в стандартном базисе называется *евклидовой*. Эта форма невырождена и над полем $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ задаёт евклидову структуру на пространстве \mathbb{R}^n . Однако над отличными от \mathbb{R} полями свойства этой формы могут существенно отличаться от интуитивно привычных свойств евклидовой структуры. Например, над полем \mathbb{C} ненулевой вектор $e_1 - ie_2 \in \mathbb{C}^2$ имеет нулевой скалярный квадрат.

Упражнение 14.4. Приведите пример n -мерного подпространства в \mathbb{C}^{2n} , на которое евклидова форма ограничивается в тождественно нулевую форму.

Базисы, в которых матрица Грама евклидовой формы равна E называются *ортонормальными*. Ниже² мы увидим, что над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} характеристики $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ любая невырожденная симметричная билинейная форма изометрически изоморфна евклидовой.

Пример 14.2 (гиперболическая форма)

Симметричная билинейная форма h на чётномерном координатном пространстве \mathbb{k}^{2n} , матрица Грама которой в стандартном базисе равна

$$H = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad (14-9)$$

где E — единичная матрица размера $n \times n$, называется *гиперболической*. Она невырождена и над алгебраически замкнутым полем изометрически изоморфна евклидовой форме: ортонормальный базис гиперболической формы состоит из векторов

$$\varepsilon_{2v-1} = (e_v - e_{n+v})/\sqrt{-2} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{2v} = (e_v + e_{n+v})/\sqrt{2}, \quad 1 \leq v \leq n.$$

Над полями \mathbb{R} и \mathbb{Q} гиперболическая форма не изоморфна евклидовой, поскольку евклидовы скалярные квадраты всех ненулевых векторов положительны, тогда как ограничение гиперболической формы на линейную оболочку первых n базисных векторов тождественно нулевое. Базис, в котором матрица Грама гиперболической формы имеет вид (14-9), называется *гиперболическим базисом*.

¹См. п. 5.3 на стр. 63.

²См. сл. 14.1 на стр. 181.

ПРИМЕР 14.3 (СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ФОРМА)

Кососимметричная форма на чётномерном координатном пространстве \mathbb{k}^{2n} , матрица Грама которой в стандартном базисе равна

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \quad (14-10)$$

где E — единичная матрица размера $n \times n$, называется *симплектической*. Матрица J вида (14-10) называется *симплектической единицей*. Она имеет $J^2 = -E$ и $\det J = 1$. Таким образом, симплектическая форма невырождена. Базис, в котором матрица Грама кососимметричной формы равна J , называется *симплектическим базисом*. Ниже¹ мы покажем, что всякая невырожденная кососимметричная билинейная форма над *любым* полем изометрически изоморфна симплектической. Это означает, в частности, что размерность пространства с невырожденной кососимметричной формой обязательно чётна.

УПРАЖНЕНИЕ 14.5. Убедитесь в том, что все кососимметричные квадратные матрицы нечётно-го размера над полем \mathbb{k} характеристики $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ вырождены.

14.2.1. Левый и правый двойственный базис. Если билинейная форма β на пространстве V невырождена, то у любого базиса $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в V есть *правый* и *левый* двойственные базисы $\mathbf{e}^\vee = (e_1^\vee, \dots, e_n^\vee)$ и ${}^\vee\mathbf{e} = ({}^\vee e_1, \dots, {}^\vee e_n)$, состоящие из прообразов векторов двойственно-го к \mathbf{e} базиса $\mathbf{e}^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ в V^* относительно изоморфизмов правой и левой корреляций соответственно. Они однозначно характеризуются соотношениями ортогональности

$$\beta(e_i, e_j^\vee) = \beta({}^\vee e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad (14-11)$$

которые на матричном языке означают, что взаимные матрицы Грама двойственных относительно формы β базисов единичные: $B_{\mathbf{e}\mathbf{e}^\vee} = B_{{}^\vee\mathbf{e}\mathbf{e}} = E$. Согласно формулам из н° 14.1.1 матрицы переходов $C_{\mathbf{e},\mathbf{e}^\vee}$ и $C_{\mathbf{e},{}^\vee\mathbf{e}}$, в j -тых столбцах которых стоят координаты векторов e_j^\vee и ${}^\vee e_j$ в базисе \mathbf{e} , удовлетворяют соотношениям $B_{\mathbf{e}} C_{\mathbf{e},\mathbf{e}^\vee} = B_{\mathbf{e},\mathbf{e}^\vee} = E$ и $C_{\mathbf{e},{}^\vee\mathbf{e}} B_{\mathbf{e}} = B_{{}^\vee\mathbf{e},\mathbf{e}} = E$, откуда

$$C_{\mathbf{e},\mathbf{e}^\vee} = B_{\mathbf{e}}^{-1} \quad \text{и} \quad C_{\mathbf{e},{}^\vee\mathbf{e}} = (B_{\mathbf{e}}^t)^{-1}.$$

Знание двойственного к базису \mathbf{e} относительно билинейной формы β базиса позволяет находить коэффициенты разложения любого вектора $v \in V$ по каждому из двойственных базисов как взятые с надлежащей стороны скалярные произведения вектора v с соответствующими элементами двойственного базиса:

$$v = \sum_i \beta({}^\vee e_i, v) e_i = \sum_i \beta(v, e_i^\vee) e_i = \sum_i \beta(v, e_i) {}^\vee e_i = \sum_i \beta(e_i, v) e_i^\vee. \quad (14-12)$$

УПРАЖНЕНИЕ 14.6. Убедитесь в этом.

14.2.2. Изотропные подпространства. Подпространство $U \subset V$ называется *изотропным* для билинейной формы β , если эта форма ограничивается на него в тождественно нулевую форму, т. е. когда $\beta(u, w) = 0$ для всех $u, w \in U$. Например, каждое одномерное подпространство является изотропным для любой кососимметричной формы, а линейные оболочки первых n и последних n базисных векторов пространства \mathbb{k}^{2n} изотропны для гиперболической формы из прим. 14.2 и симплектической формы из прим. 14.3.

¹См. теор. 14.3 на стр. 181.

Предложение 14.2

Размерность изотропного подпространства невырожденной билинейной формы на пространстве V не превосходит $\dim V/2$.

Доказательство. Изотропность подпространства $U \subset V$ означает, что корреляция $\beta^\wedge : V \simeq V^*$ отображает U внутрь $\text{Ann } U \subset V^*$. Так как корреляция невырожденной формы инъективна, $\dim U \leq \dim \text{Ann } U = \dim V - \dim U$, откуда $2 \dim U \leq \dim V$. \square

Замечание 14.1. Примеры гиперболической и симплектической форм показывают, что оценка из предл. 14.2 в общем случае неумлучшаема.

14.2.3. Группа изометрий. Как мы видели в н° 14.1.4 на стр. 172, линейный эндоморфизм $f : V \rightarrow V$ является изометрическим для билинейной формы β на пространстве V если и только если его матрица F_e в произвольном базисе e пространства V связана с матрицей Грама B_e этого базиса соотношением¹ $F_e^t B_e F_e = B_e$. Если форма β невырождена, то беря определители обеих частей, заключаем, что $\det^2 F_e = 1$, откуда $\det F_e = \pm 1$. Поэтому любая изометрия конечномерного пространства с невырожденной билинейной формой обратима и с точностью до знака сохраняет объём. Так как композиция изометрий и обратное к изометрии отображение тоже являются изометриями, изометрические преобразования пространства V образуют группу. Она обозначается $O_\beta(V)$ и называется *группой изометрий*² невырожденной билинейной формы β . Изометрии определителя 1 называются *специальными* или *собственными* и образуют в группе всех изометрий подгруппу, обозначаемую $SO_\beta(V)$.

Из форм. (14-8) на стр. 172 вытекает, что обратная к изометрии f изометрия имеет матрицу

$$F_e^{-1} = B_e^{-1} F_e^t B_e. \quad (14-13)$$

Пример 14.4 (изометрии вещественной гиперболической плоскости)

Оператор $f : H_2 \rightarrow H_2$, имеющий в стандартном гиперболическом базисе $e_1, e_2 \in H_2$ матрицу

$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

является изометрическим тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

что равносильно уравнениям $ac = bd = 0$ и $ad + bc = 1$, имеющим два семейства решений:

$$F_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{F}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \lambda \in \mathbb{k}^* = \mathbb{k} \setminus \{0\}. \quad (14-14)$$

Над полем \mathbb{R} оператор F_λ является собственным, и при $\lambda > 0$ называется *гиперболическим поворотом*, т. к. каждый вектор $v = (x, y)$, обе координаты которого ненулевые, движется при действии на него операторов F_λ с $\lambda \in (0, \infty)$ по гиперболе $xy = \text{const}$. Если положить $\lambda = e^t$ и

¹См. формулу (14-8) на стр. 172.

²А также *ортогональной группой* или *группой автоморфизмов*.

перейти к ортогональному базису из векторов $p = (e_1 + e_2)/\sqrt{2}$, $q = (e_1 - e_2)/\sqrt{2}$, то оператор F_λ запишется в нём матрицей, похожей на матрицу евклидова поворота

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix},$$

где $\operatorname{ch} t \stackrel{\text{def}}{=} (e^t + e^{-t})/2$ и $\operatorname{sh} t \stackrel{\text{def}}{=} (e^t - e^{-t})/2$ называются *гиперболическими косинусом* и *синусом* вещественного числа t . Оператор F_λ с $\lambda < 0$ является композицией гиперболического поворота и центральной симметрии. Несобственный оператор \tilde{F}_λ является композицией гиперболического поворота с отражением относительно той оси гиперболы, которая пересекается с её ветвями.

14.2.4. Биекция между формами и операторами. На пространстве V с билинейной формой $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ каждому линейному оператору $f : V \rightarrow V$ можно сопоставить билинейную форму $\beta_f(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(u, fw)$ с матрицей Грама $e^t \cdot f(e) = e^t \cdot e F_e = B_e F_e$ в произвольно выбранном базисе e пространства V . Поскольку на языке матриц отображение $f \mapsto \beta_f$ заключается в левом умножении матрицы оператора на матрицу Грама: $F_e \mapsto B_e F_e$, оно линейно и обратимо, если форма β невырождена. Обратное отображение задаётся умножением матрицы оператора слева на обратную к матрице Грама матрицу. Поэтому каждая билинейная форма

$$\alpha : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$$

на конечномерном векторном пространстве V с фиксированной невырожденной билинейной формой β имеет вид $\alpha(u, w) = \beta(u, f_\alpha w)$ для некоторого линейного оператора $f_\alpha : V \rightarrow V$, однозначно определяемого формой α . Матрица F_e оператора f_α выражается через матрицы Грама B_e и A_e форм β и α по формуле $F_e = B_e^{-1} A_e$.

ПРИМЕР 14.5 (КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР)

Задаваемая невырожденной билинейной формой β биекция между формами и операторами сопоставляет транспонированной к β форме $\beta^t(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(w, u)$ оператор $\kappa : V \rightarrow V$, который называется *каноническим оператором* невырожденной билинейной формы β и однозначно характеризуется свойством

$$\forall u, w \in V \quad \beta(w, u) = \beta(u, \kappa w). \quad (14-15)$$

Матрица K_e канонического оператора в произвольном базисе e пространства V выражается через матрицу Грама B_e формы β по формуле $K_e = B_e^{-1} B_e^t$.

УПРАЖНЕНИЕ 14.7. Убедитесь, что при замене матрицы Грама по правилу $B \mapsto C^t B C$, где $C \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{k})$, матрица $K = B^{-1} B^t$ меняется по правилу $K \mapsto C^{-1} K C$, т. е. канонические операторы изоморфных билинейных форм подобны.

Так как $\beta(u, w) = \beta(w, \kappa u) = \beta(\kappa u, \kappa w)$ для всех $u, w \in V$, канонический оператор является изометрическим.

ТЕОРЕМА 14.1

Над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от двух, две невырожденные билинейные формы изометрически изоморфны если и только если их канонические операторы подобны.

Доказательство. Импликация «только если» вытекает из [упр. 14.7](#) и имеет место над любым полем. Докажем обратную импликацию. Пусть невырожденные билинейные формы α и β имеют подобные канонические операторы κ_α и $\kappa_\beta = g^{-1} \kappa_\alpha g$. Тогда форма $\alpha'(u, w) = \alpha(gu, gw)$

изометрически изоморфна форме α и имеет канонический оператор $g^{-1}\kappa_\alpha g = \kappa_\beta$, поскольку $\alpha'(u, w) = \alpha(gu, gw) = \alpha(gw, \kappa_\alpha gu) = \alpha'(w, g^{-1}\kappa_\alpha gu)$ для всех u, w . Таким образом, заменяя форму α на форму α' , мы без ограничения общности можем считать, что формы α и β имеют один и тот же канонический оператор κ . Линейный оператор f , однозначно определяемый равенством $\beta(u, w) = \alpha(u, fw)$ для всех u, w , обратим в силу невырожденности форм α, β и самосопряжён относительно α в том смысле¹, что для всех u, w выполняется равенство

$$\alpha(fu, w) = \alpha(\kappa^{-1}w, fu) = \beta(\kappa^{-1}w, u) = \beta(u, w) = \alpha(u, fw).$$

Любой многочлен от оператора f тоже самосопряжён относительно формы α . В силу идущей ниже лем. 14.1, над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль существует такой многочлен $P(t)$, что оператор $h = P(f)$ удовлетворяет равенству $h^2 = f$. Такой оператор h биективен и самосопряжён относительно α . Поэтому форма

$$\beta(u, w) = \alpha(u, fw) = \alpha(u, h^2w) = \alpha(hu, hw)$$

изометрически изоморфна форме α . □

ЛЕММА 14.1

Над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от двух, из любого биективного линейного оператора f на конечномерном векторном пространстве V можно извлечь квадратный корень, являющийся многочленом от оператора f .

Доказательство. Из курсов алгебры и комбинаторики известно, что при всех целых $k \geq 0$ биномиальный коэффициент $\binom{2k}{k}$ нацело делится² на $(k+1)$. Поэтому над любым полем \mathbb{k} характеристики $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ корректно определён биномиальный степенной ряд

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} x^k = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-3) \cdot x^k = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{4^{k-1}} \binom{2k-2}{k-1} \frac{x^k}{k}. \end{aligned} \quad (14.16)$$

УПРАЖНЕНИЕ 14.8. Убедитесь в том, что квадрат многочлена, равного сумме первых $n+1$ членов этого ряда, сравним в $\mathbb{k}[x]$ с $1+x$ по модулю x^{n+1} .

Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} характеристический многочлен $\chi_f(t)$ оператора f разлагается на взаимно простые множители $(t-\lambda)^{m_\lambda}$, где $\lambda \in \text{Spec}(f)$, и пространство V распадается в прямую сумму f -инвариантных корневых подпространств³ $K_\lambda = \ker(f - \lambda \text{Id})^{m_\lambda}$. Так как f биективен, в этом разложении все λ отличны от нуля, и для каждого λ корректно определён многочлен $p_\lambda(t) \in \mathbb{k}[t]$, равный сумме первых m_λ членов формального разложения Тэйлора

¹Ср. с н° 12.3 на стр. 148.

²Частное $c_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$ называется k -тым числом Каталана и имеет несколько чисто комбинаторных описаний, см. пример 4.7 на стр. 61 лекции:

http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_04.pdf.

³См. н° 10.4 на стр. 125.

функции \sqrt{t} в точке λ , которое получается из биномиальной формулы (14-16) заменой переменных:

$$\begin{aligned}\sqrt{t} &= \sqrt{\lambda + (t - \lambda)} = \sqrt{\lambda} \cdot (1 + \lambda^{-1/2}(t - \lambda))^{1/2} = \\ &= \lambda^{1/2} + \frac{1}{2}(t - \lambda) - \frac{\lambda^{-1/2}}{8}(t - \lambda)^2 + \frac{\lambda^{-1}}{16}(t - \lambda)^3 - \dots\end{aligned}$$

Согласно упр. 14.8, $p_\lambda^2(t) \equiv t \pmod{(t - \lambda)^{m_\lambda}}$. По китайской теореме об остатках существует многочлен $p(t)$, сравнимый с $p_\lambda(t)$ по модулю $(t - \lambda)^{m_\lambda}$ сразу для всех $\lambda \in \text{Spec}(f)$. Его квадрат

$$p^2(t) \equiv t \pmod{(t - \lambda)^{m_\lambda}} \quad \forall \lambda \in \text{Spec}(f).$$

Поэтому квадрат оператора $p(f)$ действует на каждом корневом подпространстве K_λ точно также, как f . Тем самым, $p^2(f) = f$. \square

14.3. Ортогоналы и ортогональные проекции. С каждым подпространством U векторного пространства V с билинейной формой $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ связаны левый и правый ортогоналы

$$\begin{aligned}{}^\perp U &= \{v \in V \mid \forall u \in U \beta(v, u) = 0\}, \\ U^\perp &= \{v \in V \mid \forall u \in U \beta(u, v) = 0\}.\end{aligned}\tag{14-17}$$

Вообще говоря, это два разных подпространства в V .

Предложение 14.3

Если билинейная форма β на конечномерном пространстве V невырождена, то для всех подпространств $U \subset V$ выполняются равенства

$$\dim {}^\perp U = \dim V - \dim U = \dim U^\perp \quad \text{и} \quad ({}^\perp U)^\perp = U = {}^\perp(U^\perp).$$

Доказательство. Первые два равенства верны, так как ортогоналы (14-17) суть прообразы подпространства $\text{Ann } U \subset V^*$ при изоморфизмах ${}^\wedge \beta, \beta^\wedge : V \simeq V^*$, и $\dim \text{Ann } U = \dim V - \dim U$. Вторые два равенства вытекают из первых, поскольку оба подпространства $({}^\perp U)^\perp$ и ${}^\perp(U^\perp)$ содержат U и имеют размерность $\dim U$. \square

Предложение 14.4

Пусть билинейная форма β на произвольном¹ векторном пространстве V ограничивается на конечномерное подпространство $U \subset V$ в невырожденную на этом подпространстве билинейную форму $\beta|_U : U \times U \rightarrow \mathbb{k}$. Тогда $V = U \oplus U^\perp$, и проекция $v_U \in U$ каждого вектора $v \in V$ на подпространство U вдоль U^\perp однозначно определяется тем, что $\beta(u, v) = \beta(u, v_U)$ для всех $u \in U$. Вектор v_U выражается через произвольный базис u_1, \dots, u_n пространства U по формуле

$$v_U = \sum_{i=1}^n \beta({}^\vee u_i, v) u_i = \sum_{i=1}^n \beta(u_i, v) u_i^\vee,\tag{14-18}$$

где ${}^\vee u_1, \dots, {}^\vee u_n$ и $u_1^\vee, \dots, u_n^\vee$ суть левый и правый двойственные к u_1, \dots, u_n относительно формы β базисы² в U .

¹Возможно даже бесконечномерном.

²См. п.° 14.2.1 на стр. 174.

Доказательство. Так как ограничение формы β на U невырождено, для любого вектора $v \in V$ существует единственный такой вектор $v_U \in U$, что линейная функция $u \mapsto \beta(u, v)$ на пространстве U задаётся правым скалярным умножением векторов из U на этот вектор v_U , т. е. для всех $u \in U$ выполняется равенство $\beta(u, v) = \beta(u, v_U)$. Поэтому разность $v - v_U \in U^\perp$. Таким образом, каждый вектор $v \in V$ представляется в виде суммы $v = v_U + (v - v_U)$ с $v_U \in U$ и $v - v_U \in U^\perp$. Поскольку в любом разложения $v = v'_U + w$ с $v'_U \in U$ и $w \in U^\perp$ для всех $u \in U$ выполняется равенство $\beta(u, v) = \beta(u, v'_U)$, имеем равенство $v'_U = v_U$, а значит и равенство $w = v - v'_U = v - v_U$, что доказывает первые два утверждения предложения. Последнее утверждение вытекает из форм. (14-12) на стр. 174: $v_U = \sum_i \beta(\vee u_i, v_U) u_i = \sum_i \beta(\vee u_i, v) u_i$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 14.9. Докажите симметричное утверждение: $V = {}^\perp U \oplus U$ если и только если билинейная форма β ограничивается на конечномерное подпространство $U \subset V$ в невырожденную на этом подпространстве билинейную форму $\beta|_U : U \times U \rightarrow \mathbb{k}$; при этом проекция ${}_U v$ каждого вектора $v \in V$ на U вдоль ${}^\perp U$ однозначно определяется тем, что $\beta(v, u) = \beta({}_U v, u)$ для всех $u \in U$ и находится по формуле ${}_U v = \sum \beta(v, u_i^\vee) u_i = \sum \beta(v, u_i) \vee u_i$.

14.4. Симметричные и кососимметричные формы. Билинейная форма β называется *симметричной*, если $\beta(u, w) = \beta(w, u)$ для всех $u, w \in V$, и *кососимметричной* — если $\beta(v, v) = 0$ для всех $v \in V$. В последнем случае для любых $u, w \in V$ выполняется равенство

$$0 = \beta(u + w, u + w) = \beta(u, w) + \beta(w, u),$$

откуда $\beta(u, w) = -\beta(w, u)$.

УПРАЖНЕНИЕ 14.10. Убедитесь, что при $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ равенство $\beta(u, w) = -\beta(w, u)$ всех $u, w \in V$ равносильно равенству $\beta(v, v) = 0$ для всех $v \in V$ и что формы $\beta(u, w)$ и $\beta^t(u, w) = \beta(w, u)$ пропорциональны ровно в двух случаях: когда $\beta^t = \pm\beta$.

Если $\text{char } \mathbb{k} = 2$, каждая кососимметричная форма автоматически симметрична, но не наоборот. Если $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$, пространства симметричных и кососимметричных билинейных форм имеют нулевое пересечение, и каждая билинейная форма β однозначно раскладывается в сумму $\beta = \beta_+ + \beta_-$ симметричной и кососимметричной форм

$$\beta_+(v, w) = \frac{\beta(v, w) + \beta(w, v)}{2} \quad \text{и} \quad \beta_-(v, w) = \frac{\beta(v, w) - \beta(w, v)}{2}.$$

14.4.1. Левая и правая корреляции симметричной билинейной формы совпадают друг с другом, и мы будем в этом случае обозначать оператор $\beta^\wedge = {}^\wedge\beta$ через $\widehat{\beta} : V \rightarrow V^*$ и называть просто *корреляцией* симметричной формы β . Напомним, корреляция переводит вектор $v \in V$, в линейную функцию

$$\widehat{\beta}v : V \rightarrow \mathbb{k}, \quad u \mapsto \beta(u, v) = \beta(v, u).$$

Для кососимметричной формы левая и правая корреляции различаются знаком: $\beta^\wedge = -{}^\wedge\beta$.

14.4.2. Ядро. Левое и правое ядро (косо)симметричной формы β совпадают друг с другом и называются просто *ядром* этой формы. Поэтому для (косо)симметричной формы β пространство $\ker {}^\wedge\beta = \ker \beta^\wedge$ обозначается просто $\ker \beta \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in V \mid \forall v \in V \beta(v, w) = \pm\beta(w, v) = 0\}$.

Предложение 14.5

Ограничение (косо) симметричной билинейной формы β на любое дополнительное к ядру $\ker \beta$ подпространство $U \subset V$ невырождено.

Доказательство. Пусть подпространство $U \subset V$ таково, что $V = \ker \beta \oplus U$, а вектор $w \in U$ удовлетворяет для всех $u \in U$ соотношению $\beta(u, w) = 0$. Записывая произвольный вектор $v \in V$ в виде $v = e + u$, где $e \in \ker \beta$ и $u \in U$, получаем $\beta(v, w) = \beta(e, w) + \beta(u, w) = 0$, откуда $w \in U \cap \ker \beta = 0$. \square

Предложение 14.6

Любая (косо) симметричная билинейная форма β на пространстве V корректно определяет на фактор пространстве $V/\ker \beta$ невырожденную билинейную форму $\bar{\beta}$ по формуле

$$\bar{\beta}([u], [w]) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(u, w). \quad (14-19)$$

Доказательство. Если $[u] = [u']$, а $[w] = [w']$, то векторы $u - u'$ и $w - w'$ лежат в $\ker \beta$ и имеют нулевые левые и правые скалярные произведения с любым вектором. Поэтому

$$\bar{\beta}([u'], [w']) = \beta(u', w') = \beta(u + (u' - u), w + (w' - w)) = \beta(u, w) = \bar{\beta}([u], [w]),$$

что доказывает корректность формулы (14-19). Пусть класс $[u] \in V/\ker \beta$ имеет нулевое скалярное произведение $\bar{\beta}([u], [w]) = 0$ со всеми классами $[w] \in V/\ker \beta$. По определению формы $\bar{\beta}$ это означает, что $\beta(u, w) = 0$ для всех $w \in U$, откуда $u \in \ker \beta$ и $[u] = 0$. \square

Предостережение 14.1. Для произвольной билинейной формы, которая не является симметричной или кососимметричной, левое и правое ядра $\ker({}^V\beta)$ и $\ker(\beta^V)$ могут быть различны, и в этом случае предл. 14.5 и предл. 14.6, вообще говоря, неверны.

14.4.3. Ортогоналы и проекции. Если форма β на пространстве V (косо) симметрична, то левый и правый ортогоналы к любому подпространству $U \subset V$ совпадают друг с другом и обозначаются через U^\perp . Если (косо) симметричная форма β ограничивается на подпространство $U \subset V$ в невырожденную на этом подпространстве форму, то $V = U \oplus U^\perp$ по предл. 14.4. В этом случае подпространство U^\perp называется *ортогональным дополнением* к подпространству U . Проекция v_U вектора $v \in V$ на U вдоль U^\perp называется *ортогональной проекцией* на U относительно формы β . Вектор v_U однозначно характеризуется тем, что его левое и правое скалярное произведение со всеми векторами из U такие же, как и у вектора v .

Если форма β невырождена на всём пространстве V , то по предл. 14.4

$$\dim U^\perp = \dim V - \dim U \quad \text{и} \quad U^{\perp\perp} = U$$

для всех подпространств $U \subset V$. В этом случае ограничение формы β на подпространство $U \subset V$ невырождено если и только если невырождено её ограничение на U^\perp .

ТЕОРЕМА 14.2 (ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА)

Каждое конечномерное векторное пространство с симметричной билинейной формой β над любым полем \mathbb{k} характеристики $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ обладает базисом с диагональной матрицей Грама¹.

Доказательство. Если $\dim V = 1$ или форма β нулевая, то матрица Грама любого базиса диагональна. Если форма β ненулевая, то найдётся вектор $e \in V$ с $\beta(e, e) \neq 0$, ибо в противном случае $2\beta(u, w) = \beta(u + w, u + w) - \beta(u, u) - \beta(w, w) = 0$ для всех $u, w \in V$. Возьмём такой вектор e

¹Такие базисы называются *ортогональными*.

в качестве первого вектора искомого базиса. Поскольку ограничение формы β на одномерное подпространство $U = \mathbb{k} \cdot e$ невырождено, пространство V распадается в прямую ортогональную сумму $U \oplus U^\perp$. По индукции, в U^\perp есть базис с диагональной матрицей Грама. Добавляя к нему e , получаем искомый базис в V . \square

Следствие 14.1

Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} характеристики $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ две симметричных билинейных формы изометрически изоморфны если и только если их матрицы Грама имеют одинаковый ранг.

Доказательство. Над алгебраически замкнутым полем каждый ненулевой диагональный элемент матрицы Грама ортогонального базиса можно сделать единичным, заменив соответствующий ему базисный вектор e_i на $e_i / \sqrt{\beta(e_i, e_i)}$. \square

Пример 14.6 (ортогональный базис гиперболического пространства)

В гиперболическом пространстве¹ \mathbb{k}^{2n} с гиперболическим базисом $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}$ над произвольным полем \mathbb{k} характеристики $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ в качестве ортогонального базиса можно взять, например, векторы $p_i = e_i + e_{n+i}$ и $q_i = e_i - e_{n+i}$ со скалярными квадратами $h(p_i, p_i) = 2$ и $h(q_i, q_i) = -2$.

Теорема 14.3 (теорема Дарбу)

Над произвольным полем \mathbb{k} любой характеристики для каждой кососимметричной билинейной формы ω на конечномерном векторном пространстве V имеется базис с матрицей Грама, ненулевые элементы которой сосредоточены в расположенных на главной диагонали 2×2 блоках вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14-20)$$

В частности, $\text{rk } \omega$ всегда чётен.

Доказательство. Если форма тождественно нулевая, то доказывать нечего. Если $\omega(u, w) \neq 0$ для каких-то u, w , положим $e_1 = u, e_2 = w/\omega(u, w)$. Так как матрица Грама векторов e_1, e_2 имеет вид (14-20), эти векторы не пропорциональны и порождают двумерное подпространство $U \subset V$, на которое форма ω ограничивается невырождено. Поэтому $V = U \oplus U^\perp$. Применяя индукцию по $\dim V$, можно считать, что в подпространстве U^\perp требуемый базис есть. Добавляя к нему e_1, e_2 , получаем искомый базис в V . \square

Следствие 14.2

Над произвольным полем \mathbb{k} любой характеристики всякая невырожденная кососимметричная форма изометрически изоморфна симплектической форме из [прим. 14.3](#) на стр. 174.

Доказательство. Согласно [теор. 14.3](#) все ненулевые элементы матрицы Грама формы в подходящем базисе сосредоточатся в расположенных на главной диагонали 2×2 блоках (14-20). Чтобы получить из такого базиса симплектический, надо лишь переставить базисные векторы: сначала написать подряд все векторы с нечётными номерами, а потом — с чётными. \square

¹См. [прим. 14.2](#) на стр. 173.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 14.3. Это переформулировка того, что форма $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ билинейна.

Упр. 14.4. Линейная оболочка векторов $e_\nu + ie_{n+\nu}$ с $1 \leq \nu \leq n$.

Упр. 14.5. Если матрица $B \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ кососимметрична, то при нечётном n

$$\det B = \det B^t = \det(-B) = (-1)^n \det B = -\det B,$$

откуда $\det B = 0$ если $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$.

Упр. 14.6. Пусть $v = \sum x_i e_i$. Скалярно умножая v слева на $\vee e_i$, получаем $\beta(\vee e_i, v) = x_i$. Скалярно умножая v справа на e_i^\vee , получаем $\beta(v, e_i^\vee) = x_i$, и т. д.

Упр. 14.8. В $\mathbb{k}[[x]]$ квадрат ряда $\sqrt{1+x}$ равен $1+x$, а коэффициенты при x^k для $0 \leq k \leq n$ у квадрата ряда $\sqrt{1+x}$ такие же, как и у квадрата многочлена из условия.