§13. Выпуклая геометрия

Всюду в этом параграфе речь идёт про конечномерные векторные и аффинные пространства над полем $\mathbb{R}$.

13.1. Выпуклые фигуры. Барицентрическая комбинация[1] $x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_mp_m$ точек p_i вещественного аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ называется *выпуклой*, если все её коэффициенты $x_i \geqslant 0$. Фигура $\Phi \subset \mathbb{A}^n$ называется *выпуклой*, если она содержит все выпуклые барицентрические комбинации любых своих точек. Из теоремы о группировании масс[2] вытекает, что для выпуклости фигуры необходимо и достаточно, чтобы вмести с любыми двумя своими точками a, b она содержала и соединяющий их *отрезок* $[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda a + \mu b \mid \lambda + \mu = 1,\ \lambda, \mu > 0\}$. Очевидно, что пересечение выпуклых фигур выпукло. Пересечение всех выпуклых фигур, содержащих данную фигуру Φ, называется *выпуклой оболочкой* фигуры Φ и обозначается $\operatorname{conv}\Phi$. Иначе $\operatorname{conv}\Phi$ можно описать как множество всех выпуклых барицентрических комбинаций всевозможных конечных наборов точек фигуры Φ: это множество выпукло по упр. 1.8 и содержится в любом выпуклом множестве, содержащем фигуру Φ.

13.1.1. Топологическое отступление. Для произвольного вещественного $\varepsilon > 0$ мы называем *ε-окрестностью* точки $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ правильный куб с центром в p и направленными вдоль стандартных координатных осей рёбрами длины 2ε:

$$B_\varepsilon(p) \stackrel{\text{def}}{=} \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ :\ \forall\, i\ |x_i - p_i| \leq \varepsilon\}\,. \tag{13-1}$$

Подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ *открыто*[3], если вместе с каждой точкой $p \in U$ в U лежит и какая-нибудь её ε-окрестность $B_\varepsilon(p)$. Кубы (13-1) являются шарами радиуса ε относительно $\sup$-*нормы*

$$||(x_1, \dots, x_n)||_{\sup} = \max_i |x_i|\,.$$

Рассматриваемая нами топология является *метрической топологией*, определяемой при помощи этой нормы. Поскольку все нормы на векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ задают одну и ту же топологию, данное выше определение отрытого множества не зависит от выбора системы координат, использованной для определения ε-окрестностей.

Упражнение 13.1. Докажите это непосредственно, без ссылок на курс топологии.

Напомню, что точка p называется *внутренней* точкой фигуры Φ, если она лежит в Φ вместе с некоторою своею ε-окрестностью. Множество внутренних точек фигуры Φ обозначатся $\operatorname{int}\Phi$. Внутренние точки дополнения $\mathbb{A}^n \smallsetminus \Phi$ называются *внешними* точками фигуры $\Phi \subset \mathbb{A}^n$. Точки, не являющиеся ни внешними, ни внутренними, называются *граничными*. Множество граничных точек фигуры Φ обозначатся $\partial\Phi$. Объединение $\overline{\Phi} = \Phi \cup \partial\Phi$ называется *замыканием* фигуры Φ.

Упражнение 13.2. Покажите, что $p \in \partial\Phi$ если и только если в любой ε-окрестности точки p имеются как точки фигуры Φ, так и точки не лежащие в Φ, и докажите, что замыкание $\overline{\Phi}$ является наименьшим по включению замкнутым множеством, содержащим Φ.

Предложение 13.1

Внутренность и замыкание любой выпуклой фигуры выпуклы.

[1] См. n° 1.4.2 на стр. 16.

[2] См. упр. 1.8 на стр. 17.

[3] Все необходимые нам сведения из курса топологии имеются в лекции: http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_08.pdf.

Доказательство. Первое вытекает из того, что если точки a и b содержатся в выпуклом множестве Φ вместе с некоторыми ε-кубами $B_\varepsilon(a)$, $B_\varepsilon(b) \subset \Phi$, то все точки отрезка $[ab]$ содержатся в Φ вместе с такими же ε-кубами, см. рис. 13◇1. Второе — из того, что если $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$ и $b = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$, то при любых фиксированных λ и μ предел $\lim\limits_{k\to\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \lim\limits_{k\to\infty} a_k + \mu \lim\limits_{k\to\infty} b_k = \lambda a + \mu b$. Таким образом, каждая точка отрезка $[a, b]$ является пределом последовательности точек фигуры Φ, если таковыми являются концы a, b этого отрезка. □

Упражнение 13.3. Докажите, что замкнутое выпуклое множество с непустой внутренностью является замыканием множества своих внутренних точек, и приведите пример невыпуклого замкнутого множества с непустой внутренностью, которое не является замыканием множества своих внутренних точек.

Пример 13.1 (симплексы)

Выпуклая оболочка $n+1$ точек $p_0, p_1, \dots, p_n$, не лежащих в $(n-1)$-мерной плоскости, называется *n-мерным симплексом* с вершинами в этих точках и обозначается

$$[p_0, p_1, \dots, p_n] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} x_i p_i \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} x_i = 1\,,\ x_i \geqslant 0 \right\}. \tag{13-2}$$

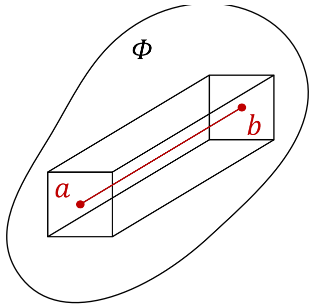

Рис. 13◇1. Выпуклоость внутренности.

Одномерные, двумерные и трёхмерные симплексы суть отрезки, треугольники и тетраэдры соответственно. В порождённом вершинами симплекса пространстве $\mathbb{A}^n$, в аффинных координатах $(x_1, \dots, x_n)$ относительно репера с началом в p_0 и базисными векторами $\overrightarrow{p_0 p_i}$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, симплекс (13-2) задаётся системой из $n+1$ линейных неоднородных неравенств $x_1 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0$, $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leqslant 1$. Так как в точке с координатами $(1/2n, \dots, 1/2n)$ все эти неравенства выполнены строго, она принадлежит симплексу вместе с некоторым ε-кубом, т. е. каждый симплекс имеет непустую внутренность. В частности, выпуклая оболочка любых $(n+1)$ не лежащих в одной гиперплоскости точек пространства $\mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность.

Упражнение 13.4. Проверьте, что граница симплекса $[p_0, p_1, \dots, p_n]$ является объединением всевозможных симплексов вида $[p_{\nu_1}, p_{\nu_2}, \dots, p_{\nu_m}]$, где $m < n$ и $\nu_i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Лемма 13.1

Для любого открытого выпуклого множества U в аффинном пространстве размерности $n \geqslant 2$ через каждую точку $p \notin U$ можно провести не пересекающую U прямую.

Доказательство. Обозначим через C объединение всех открытых лучей

$$]\,p, u) \stackrel{\text{def}}{=} \{p + t\cdot\overrightarrow{pu} \mid u \in U,\ t > 0\}\,,$$

начинающихся в p и проходящих через всевозможные точки $u \in U$. Из рис. 13◇2 и рис. 13◇3 на стр. 157 очевидно, что C является открытой выпуклой фигурой, и $p \in \partial C$. Так как $U \subset C$, достаточно провести через p прямую, не пересекающую C. Из выпуклости C следует, что любая проходящая через p прямая ℓ либо не пересекает C, либо пересекает C по одному из лучей $]\,p, u)$, все точки которого являются внутренними точками C, а все остальные отличные от p

точки прямой ℓ являются для C внешними, см. рис. 13◇2. В частности, внешние для C точки существуют. Пусть q — одна из них. Поскольку объемлющее аффинное пространство по крайней мере двумерно, через q можно провести пересекающую C прямую, отличную от прямой (qp). На ней имеется отличная от p граничная точка r конуса C. Тем самым, $(pr) \cap C = \varnothing$. □

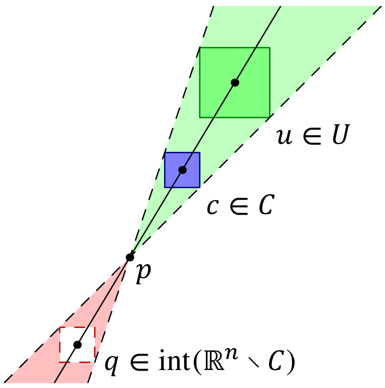

Рис. 13◇2. Открытость C и непустота $\operatorname{int}(\mathbb{A}^n \smallsetminus C)$.

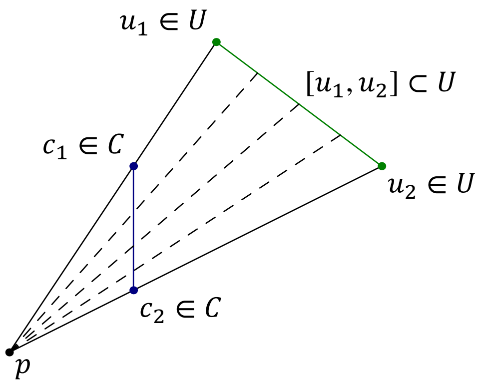

Рис. 13◇3. Выпуклость C.

13.2. Опорные полупространства. Мы называем *аффинными функционалами* на пространстве $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ аффинные отображения[1] $a : \mathbb{A}^n \to \mathbb{R}$. Если произвольно фиксировать начальную точку $c \in \mathbb{A}^n$, то действие такого функционала на точку $p \in \mathbb{A}^n$ задаётся формулой

$$a(p) = a(c) + \alpha(\overrightarrow{cp}),$$

которую мы будем коротко записывать в виде $a = a_c + \alpha$, где $a_c = a(c) \in \mathbb{R}$, а дифференциал $\alpha = D_a \in V^*$ не зависит от c. Ограничение аффинного функционала $a : \mathbb{A}^n \to \mathbb{R}$ на любой отрезок $[p, q] \subset \mathbb{A}^n$ представляет собою «школьную линейную функцию» $a(x) = \alpha x + \beta$ на этом отрезке, и для неё имеются следующие исключающие друг друга возможности: она либо тождественно нулевая, либо нигде не обращается в нуль и имеет на всём отрезке постоянный знак, либо зануляется ровно в одной точке $z \in [p, q]$. В последнем случае имеется дальнейшая альтернатива: либо точка z является одним из концов отрезка, и функционал a имеет постоянный знак на полуинтервале $[p, q] \smallsetminus z$, либо $z \in (a, b)$, а a имеет постоянные и противоположные друг другу знаки на полуинтервалах $[p, z)$ и $(z, b]$. Таким образом, каждый непостоянный аффинный функционал $a : \mathbb{A}^n \to \mathbb{R}$ задаёт разбиение аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ в дизъюнктное объединение аффинной гиперплоскости $H_a = \{p \in \mathbb{A}^n \mid a(p) = 0\}$ и двух выпуклых открытых полупространств $\operatorname{int} H_a^+ = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) > 0\}$ и $\operatorname{int} H_a^- = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) < 0\}$, которые являются внутренностями двух замкнутых полупространств $H_a^+ = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) \geqslant 0\}$ и $H_a^- = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) \leqslant 0\}$ с общей границей $\partial H_a^+ = \partial H_a^- = H_a$. Каждый отрезок $[p, q]$ с $p \in \operatorname{int} H^+$ и $q \in \operatorname{int} H_a^-$ пересекает гиперплоскость H_a в единственной точке, и она является внутренней точкой отрезка $[p, q]$.

Определение 13.1 (опорные гиперплоскости и полупространства)
Гиперплоскость $H_a \subset \mathbb{A}^n$ называется *опорной* для фигуры $\Phi \subset \mathbb{A}^n$, если $H_a \cap \partial\Phi \neq \varnothing$ и $\Phi \subseteq H_a^+$. В этой ситуации замкнутое полупространство H_a^+ называется *опорным полупространством*, а аффинный функционал a — *опорным функционалом* фигуры Φ.

[1] См. n° 2.2 на стр. 25.

Теорема 13.1
Для любых открытого выпуклого множества U и не пересекающегося с ним аффинного подпространства Π в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ существует аффинная гиперплоскость, содержащая Π и не пересекающая U.

Доказательство. Поместим начало координат внутрь Π и отождествим Π с векторным подпространством $W \subset V$ (возможно нулевым). Обозначим через $H \subset V$ какое-нибудь максимальное по включению векторное подпространство, содержащее W и не пересекающее U, а через H' — любое дополнительное к H векторное подпространство. Проекция пространства $V = H \oplus H'$ на H' вдоль H переводит отрезки из $\mathbb{A}(V)$ в отрезки или точки из $\mathbb{A}(H')$, а кубы из $\mathbb{A}(V)$ со сторонами, направленными вдоль базисных векторов любого базиса в V, согласованного с разбиением $V = H \oplus H'$, — в аналогичные кубы в $\mathbb{A}(H')$. Поэтому множество U спроектируется в открытое выпуклое множество $U' \subset \mathbb{A}(H')$, не содержащее нуля, поскольку ядро проекции H не пересекается с U. Если $\dim H' > 1$, то по лем. 13.1 в H' найдётся одномерное подпространство L, не пересекающее U'. Но тогда подпространство $H \oplus L \subset V$ не пересекает U и строго больше, чем H, вопреки выбору H. Поэтому $\dim H' = 1$ и H является искомой гиперплоскостью. □

Теорема 13.2
Через каждую граничную точку p любой выпуклой фигуры Φ можно провести опорную гиперплоскость (возможно, не единственную).

Доказательство. Если фигура $\Phi \subset \mathbb{A}^n$ целиком лежит в какой-нибудь гиперплоскости, то эта гиперплоскость и будет опорной. Если же в Φ есть $n+1$ точек, не лежащих в одной гиперплоскости, то $\operatorname{int}\Phi \neq \varnothing$ согласно прим. 13.1 на стр. 156. Проведём через p гиперплоскость H_a, не пересекающую $\operatorname{int}\Phi$. Функционал a имеет на $\operatorname{int}\Phi$ постоянный знак, так как в противном случае, соединив точки разного знака отрезком, мы получим на этом отрезке нуль функционала, т. е. точку из $H_a \cap \operatorname{int}\Phi$. Меняя, если нужно, знак у a, мы можем считать, что $\operatorname{int}\Phi \subset \operatorname{int} H_a^+$. Поскольку Φ лежит в замыкании своей внутренности $\operatorname{int}\Phi$, которое в свою очередь содержится в замкнутом полупространстве H_a^+, мы заключаем, что $\Phi \subset H_a^+$. □

Теорема 13.3
Всякое замкнутое выпуклое множество $Z \subset \mathbb{R}^n$ является пересечением своих опорных полупространств.

Доказательство. Применяя индукцию по размерности наименьшего аффинного подпространства, содержащего Z, мы можем считать, что Z не содержится в гиперплоскости, а значит, имеет непустую внутренность. Покажем, что в этом случае каждая внешняя точка $q \notin Z$ не лежит хотя бы в одном из опорных полупространств множества Z. Для этого соединим q отрезком $[q,p]$ с какой-нибудь внутренней точкой $p \in \operatorname{int} Z$ и проведём опорное полупространство H_a^+ к Z в граничной точке $r \in [q,p] \cap \partial Z$. Поскольку r лежит строго внутри $[q,p]$, из $a(p) > 0$ и $a(r) = 0$ следует, что $a(q) < 0$, т. е. $q \notin H_a^+$. □

13.3. Грани и крайние точки. Пересечение замкнутой выпуклой фигуры Φ с любой её опорной гиперплоскостью называется *гранью* фигуры Φ. Каждая грань фигуры Φ тоже является замкнутым выпуклым множеством. Размерностью грани называется размерность наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань. Отметим, что размерность любой грани фигуры $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ строго меньше n. Нульмерные грани (т. е. грани-точки) называются *вершинами*. Под внутренними, внешними и граничными точками грани понимаются таковые точки в топологии наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань.

Интуитивное содержание термина «грань», основанное на опыте работы с многогранниками, не всегда адекватно при работе с *произвольными* выпуклыми замкнутыми множествами. Например, у шара имеется континуальное множество граней и все они нульмерны, а у фигуры на рис. 13◇4, где пара отрезков гладко сопрягается с овалами, есть две одномерных грани, нульмерные грани которых не являются гранями самой фигуры. Таким образом, грань грани замкнутой выпуклой фигуры Φ может не быть гранью самой фигуры Φ.

Точка $p \in \Phi$ называется *крайней точкой* замкнутой выпуклой фигуры Φ, если она не является внутренней точкой никакого отрезка $[a, b] \subset \Phi$. Крайняя точка не может быть внутренней точкой никакой замкнутой выпуклой фигуры, отличной от точки. Если же точка q является внутренней точкой какого-либо отрезка $[a, b] \subset \Phi$, то она может оказаться в грани фигуры Φ только если весь отрезок $[a, b]$ лежит в этой грани, поскольку в противном случае высекающий грань функционал менял бы на концах отрезка знак и не был бы опорным. Таким образом, крайние точки суть последние, нульмерные элементы всевозможных цепочек вида: фигура Φ, грань фигуры Φ, грань грани фигуры Φ, грань грани грани фигуры Φ и т. д., при условии, что такая цепочка действительно заканчивается нульмерной фигурой. В частности, все вершины фигуры Φ являются её крайними точками. Обратите внимание, что крайние точки всех граней замкнутой выпуклой фигуры Φ являются крайними и для Φ, хотя при этом они могут не быть вершинами фигуры Φ.

Рис. 13◇4.

Теорема 13.4
Каждая ограниченная замкнутая выпуклая фигура является выпуклой оболочкой своих крайних точек.

Доказательство. Индукция по размерности фигуры. Любая внутренняя точка фигуры является выпуклой комбинацией концов отрезка, высекаемого из фигуры произвольной проходящей через точку прямой. Эти концы лежат на гранях фигуры и по индукции являются выпуклыми комбинациями крайних точек этих граней. Последние являются крайними точками и для самой фигуры. □

Определение 13.2 (цилиндры)
Замкнутая выпуклая фигура вида $\Phi = \mathbb{A}(U) \times B \subset \mathbb{A}(U) \times \mathbb{A}(W)$, где $\dim U > 0$, а $B \subset \mathbb{A}(W)$ — непустая замкнутая выпуклая фигура, не содержащая аффинных подпространств положительной размерности, называется *цилиндром* с *основанием* B и *образующей* $\mathbb{A}(U)$. Если основание B состоит из одной точки, цилиндр совпадает со своей образующей $\mathbb{A}(U)$ и является аффинным пространством.

Предложение 13.2
Через каждую точку p любой замкнутой выпуклой фигуры $\Phi \subset \mathbb{A}(V)$ проходит единственное максимальное по включению аффинное подпространство, целиком содержащееся в Φ. Все такие подпространства имеют одно и то же направляющее векторное пространство $U \subset V$. Если $U \neq 0$, то для любого дополнительного[1] векторного подпространства $U' \subset V$ замкнутая выпук-

[1]Т. е. такого, что $U \oplus U' = V$.

лая фигура $\Phi' = \Phi \cap (p + U')$ не содержит аффинных пространств положительной размерности, и $\Phi = \mathbb{A}(U) \times \Phi'$ является цилиндром с основанием Φ' с образующей $\mathbb{A}(U)$.

Доказательство. Если аффинные подпространства $p+W_1$ и $p+W_2$ содержатся в Φ, то Φ содержит и аффинное подпространство $p + (W_1 + W_2)$, т. к. для любых $w_1 \in W_1$ и $w_2 \in W_2$ точка $p + w_1 + w_2$ является серединой отрезка с концами в точках $p + 2w_1$ и $p + 2w_2$. Поэтому аффинное пространство $p + U$, где $U \subset V$ это сумма всех таких подпространств $W \subset V$, что $p + W \subset \Phi$, содержит все лежащие в Φ аффинные подпространства, проходящие через p. Если $q + W$ это максимальное содержащееся в Φ аффинное подпространство, проходящее через точку $q \notin p+U$, то $U \subset W$, так как для любого вектора $u \in U$ точка $r = q + u$ является концом содержащегося в Φ интервала $[p, r[= \{(1 - t)p + tr \mid 0 \leqslant t < 1\}$ (см. рис. 13◇5), ибо

$$(1 - t)p + t(q + u) = (1 - t)\left(p + \frac{t}{1 - t}u\right) + tq \in \Phi\,.$$

По той же причине $W \subset U$. Это доказывает первые два утверждения и первую половину третьего. Прямое разложение $V = U \oplus U'$ задаёт разложение $\mathbb{A}(V) = (p + U) \times (p + U')$, в котором $p+U \subset \Phi$. Для любой точки $q = p+u+u' \in \Phi$ точка $p+u' = q-u \in q+U$ лежит в $(p+U')\cap\Phi = \Phi'$. Наоборот, для любой точки $p + u' \in \Phi' \subset \Phi$ всё аффинное пространство $p + u' + U \subset \Phi$. Поэтому $\Phi \subset (p + U) \times \Phi'$. □

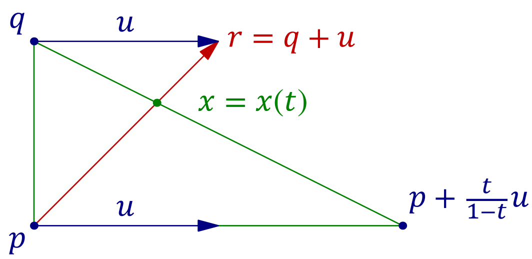

Рис. 13◇5. $\overline{px} : \overline{xr} = t : (1 - t)$.

Следствие 13.1
Следующие свойства непустой замкнутой выпуклой фигуры Φ эквивалентны друг другу:

1) Φ является цилиндром

2) Φ не имеет крайних точек

3) Φ содержит аффинное подпространство положительной размерности.

Доказательство. Импликация (1) ⇒ (2). Если Φ цилиндр, то через любую точку $p \in \Phi$ проходит содержащееся в Φ аффинное пространство положительной размерности. Поэтому никакая точка $p \in \Phi$ не может быть крайней.

Импликация (2) ⇒ (3). Если фигура Φ не совпадает с наименьшим аффинным подпространством, в котором она содержится, то в этом подпространстве у Φ есть опорная гиперплоскость, а значит, и грань строго меньшей размерности, чем $\dim \Phi$. Заменяя Φ на эту грань и повторяя рассуждение, мы построим цепочку вида: фигура Φ, грань фигуры Φ, грань грани фигуры Φ, и т. д., последний элемент в которой совпадает с наименьшим содержащим его аффинным подпространством. Если это подпространство — точка, то она крайняя. Если нет, то Φ содержит аффинное подпространство положительной размерности.

Импликация (2) ⇒ (3) вытекает из предл. 13.2. □

13.4. Выпуклые многогранники. Пересечение конечного числа замкнутых полупространств

$$M = H^+_{a_1} \cap H^+_{a_2} \cap \ldots \cap H^+_{a_m}\,, \tag{13-3}$$

задаваемых в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ набором непостоянных аффинных функционалов

$$a_1, a_2, \ldots, a_m : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{R}\,, \tag{13-4}$$

называется *выпуклым многогранником*. В частности, каждая аффинная гиперплоскость $H_a = H^+_a \cap H^-_a = H^+_a \cap H^+_{-a}$ является выпуклым многогранником. Пересечение конечного множества выпуклых многогранников является многогранником. В частности, все аффинные подпространства, включая точку, а также пустое множество и сечения любого выпуклого многогранника любыми аффинными подпространствами являются выпуклыми многогранниками. Удобно считать, что и всё объемлющее пространство $\mathbb{A}(V)$ является выпуклым многогранником, который мы будем называть *несобственным* в отличие от многогранников (13-3), которые будем называть *собственными*.

13.4.1. Координатное описание. В координатном пространстве $\mathbb{R}^n$ многогранник (13-3), являющийся пересечением m аффинных полупространств, задаваемых аффинными функционалами $a_i(x_1, \ldots, x_n) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_i$, где $i = 1, \ldots, m$, может быть описан как множество всех решений системы линейных неоднородных неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 \geqslant 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 \geqslant 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n + b_3 \geqslant 0 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + b_n \geqslant 0\,, \end{cases} \tag{13-5}$$

Следуя матричным обозначениям из n° 5.6 на стр. 67, мы будем коротко записывать эту систему в виде $Ax + b \geqslant 0$, где матрица системы $A = \left(a_{ij}\right)$ имеет в качестве i-той строки набор коэффициентов дифференциала $\alpha_i = D_{a_i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ функционала a_i, столбец $x \in \mathbb{R}^n$ состоит из координат $x_1, \ldots, x_n$, а столбец $b \in \mathbb{R}^m$ состоит из значений аффинных функционалов $a_1, \ldots, a_m$ в точке $0 \in \mathbb{R}^n$. Например, неравенство $1 \geqslant 0$ задаёт несобственный многогранник $M = \mathbb{R}^n$, а неравенство $-1 \geqslant 0$ задаёт пустой многогранник $M = \varnothing$. В общем случае множество решений системы (13-5) является прообразом положительного координатного гипероктанта $\mathbb{R}^m_{\geqslant 0} = \{(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m \mid \forall\, j\ y_j \geqslant 0\}$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ при аффинном отображении

$$a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\,, \quad x \mapsto Ax + b$$

с дифференциалом $D_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$. При замене вектора $b \in \mathbb{R}^m$ вектором $b' = b + Av$ с произвольным $v \in \mathbb{R}^n$ многогранник $M \subset \mathbb{R}^n$ параллельно сдвигается на вектор $-v$, поскольку

$$Ax + b' \geqslant 0 \iff Ax + Av + b \geqslant 0 \iff A(x + v) + b \geqslant 0\,.$$

Другими словами, перенос начала координат в $\mathbb{R}^n$ равносилен сдвигу вектора $b \in \mathbb{R}^m$ на вектор из образа $\operatorname{im} A \subset \mathbb{R}^m$ линейного отображения $x \mapsto Ax$. Поэтому многогранник M с точностью до параллельного переноса зависит только от класса $[b] = b + \operatorname{im} A \in \mathbb{R}^m / \operatorname{im} A$ по модулю подпространства, порождённого столбцами матрицы A.

Если линейный оператор $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$, имеет ненулевое ядро

$$\ker A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \neq 0\,,$$

то по предл. 6.1 на стр. 81 пространство $\mathbb{R}^n$ распадается в прямую сумму $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \oplus \ker A$, где координатное подпространство $\mathbb{R}^r = E_I$ натянуто на такие $r = \operatorname{rk} A$ стандартных базисных векторов $e_{i_1}, \dots, e_{i_r}$ пространства $\mathbb{R}^n$, что столбцы с номерами $I = (i_1, \dots, i_r)$ составляют базис[1] в линейной оболочке $\operatorname{im} A$ столбцов матрицы A. В этом случае многогранник M является цилиндром с образующей $\ker A$ над (возможно пустым) многогранником $M_I \subset E_I$, который задаётся неравенствами $A_I x_I + b \geqslant 0$, где столбец $x_I = (x_{i_1}, \dots, x_{i_r})^t$, а подматрица $A_I \subset A$ образована столбцами с номерами $i_1, \dots, i_r$. Поскольку линейное отображение $A_I: \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^m$, $x_I \mapsto A_I x_I$, инъективно, а положительный координатный октант $\mathbb{R}^m_{\geqslant 0}$ не содержит аффинных подпространств положительной размерности, многогранник M_I не содержит ненулевых аффинных подпространств. Мы будем называть такие многогранники *приведёнными*. Итак, многогранник (13-5) приведён если и только если $\operatorname{rk} A = n$.

На бескоординатном языке каждый приведённый многогранник, задаваемый m линейными неравенствами в k-мерном аффинном пространстве, представляет собою пересечение положительного гипероктанта $\mathbb{R}^m_{\geqslant 0}$ координатного пространства $\mathbb{R}^m$ с аффинным подпространством $b + U$, где $b \in \mathbb{R}^m$ — некоторый вектор, а $U \subset \mathbb{R}^m$ — векторное подпространство размерности $k \leqslant m$. Аффинное подпространство $b + U = [b]_U$ представляет собою класс вектора b в факторе $\mathbb{R}^m / U$ и не меняется при сдвиге вектора b на векторы из U.

На практике подпространство $U \subset \mathbb{R}^m$ чаще всего задаётся либо как линейная оболочка n столбцов некоторой матрицы A высоты m, либо двойственным образом — как пространство решений системы из n линейных уравнений $yA = 0$ на строку координат $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$.

В первом случае система неравенств (13-5) задаёт в аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$ цилиндр с образующей $\ker A$ над многогранником $M = [b]_U \cap \mathbb{R}^m_{\geqslant 0}$ в k-мерном аффинном пространстве $b + U \subset \mathbb{R}^m$. При этом $\dim M \leqslant \dim U = \operatorname{rk} A$.

Во втором случае многогранник $M = [b]_U \cap \mathbb{R}^m_{\geqslant 0}$, где $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ — заданная строка, состоит из всех строк $z = b + y \in \mathbb{R}^m$, лежащих в положительном координатном гипероктанте $\mathbb{R}^m_{\geqslant 0}$ и удовлетворяющих системе из n неоднородных линейных уравнений $zA = bA$. При этом $\dim M \leqslant \dim U = m - \operatorname{rk} A$.

13.4.2. Перечисление граней. Каждый собственный непустой выпуклый многогранник M в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$, ассоциированном с векторным пространством V, имеет грани, и все они являются непустыми выпуклыми многогранниками. Сам многогранник M является своей гранью если и только если он содержится в некоторой гиперплоскости. В этом случае мы будем называть совпадающую с M грань *несобственной*, а все остальные грани $\Gamma \subsetneq M$ — *собственными*. Под *размерностью* выпуклого многогранника мы всегда понимаем размерность наименьшего аффинного подпространства, в котором он содержится. В частности, размерность каждой собственной грани строго меньше размерности многогранника. Грани $\Gamma \subset M$ размерности $\dim \Gamma = \dim M - 1$ называются *гипергранями*.

Для многогранника $M = H^+_{a_1} \cap \dots \cap H^+_{a_m} \subset \mathbb{A}(V)$, задаваемого m аффинными функционалами $a_1, \dots, a_m: \mathbb{A}(V) \to \mathbb{R}$ и каждого непустого подмножества $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, m\}$

[1]В качестве I можно взять номера любого набора из $r = \operatorname{rk} A$ линейно независимых столбцов матрицы A, например, номера базисных столбцов приведённой ступенчатой матрицы, которую можно получить из A элементарными преобразованиями строк.

положим $H_I \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{i\in I} H_{a_i}$. Это аффинное подпространство в $\mathbb{A}(V)$, возможно пустое. Для каждой грани $\Gamma = H_b \cap M$, высекаемой из M каким-либо опорным функционалом $b : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{R}$, обозначаем через $I(\Gamma) = \{i \mid \Gamma \subset H_{a_i}\}$ множество номеров всех тех задающих многогранник M функционалов a_i, которые тождественно зануляются на грани Γ. Таким образом, $\Gamma \subset H_{I(\Gamma)}$ и каждый функционал a_j с $j \notin I(\Gamma)$ положителен на некотором открытом в топологии пространства $H_{I(\Gamma)}$ подмножестве грани Γ.

Теорема 13.5 (перечисление граней)
Для каждой грани $\Gamma \subset M$ аффинное подпространство $H_{I(\Gamma)}$ является наименьшим по включению аффинным пространством, содержащим грань Γ. Точка $p \in \Gamma$ является внутренней точкой грани Γ если и только если $a_j(p) > 0$ для всех $j \notin I(\Gamma)$. Для каждого непустого подмножества $I \subset \{1, \dots, m\}$ пересечение $\Gamma_I \overset{\text{def}}{=} M \cap H_I$ либо пусто, либо является гранью M, и все собственные грани многогранника M получаются таким образом.

Доказательство. Сначала докажем первые два утверждения. Рассмотрим произвольную грань $\Gamma \subset M$, и пусть точка $p \in \Gamma$ такова, что $a_j(p) > 0$ для всех $j \notin I(\Gamma)$. Тогда эти строгие неравенства выполняются и на некоторой кубической окрестности точки p в аффинном пространстве $H_{I(\Gamma)}$, и значит, точка p содержится в грани Γ_I вместе с этой кубической окрестностью. Поэтому подпространство $H_{I(\Gamma)}$ является наименьшим аффинным пространством, содержащим грань Γ_I, а точка p является внутренней точкой грани Γ_I. Отметим, что такая точка $p \in \Gamma$,в которой $a_j(p) > 0$ для всех $j \notin I(\Gamma)$, всегда существует: для каждого $j \notin \Gamma$ найдётся точка $p_j \in \Gamma$, в которой $a_j(p_j) > 0$, и в качестве точки p можно взять равновесный барицентр точек p_j. Таким образом, подпространство $H_{I(\Gamma)}$ всегда является наименьшим аффинным пространством, содержащим грань Γ_I. Остаётся проверить, что если хоть один функционал a_j с $j \notin \Gamma$ зануляется в некоторой точке $p \in \Gamma$, то точка p не может быть внутренней точкой грани Γ. Для этого рассмотрим такую точку $q \in \Gamma$, в которой $a_j(q) > 0$. Если бы точка p содержалась в Γ вместе со своей кубической[1] окрестностью, то, немного продлив отрезок $[q, p]$ за точку p, мы получили бы в грани Γ точку, где функционал a_j строго отрицателен, что невозможно.

Теперь рассмотрим произвольное непустое подмножество $I \subset \{1, \dots, m\}$. Если многогранник $\Gamma_I = M \cap H_I$ не пуст, то сумма $a_I = \sum_{i\in I} a_i$ является опорным функционалом для M и $\Gamma_I = M \cap H_{\alpha_I}$. Поэтому все непустые многогранники Γ_I являются гранями многогранника M. Покажем, что каждая собственная грань $\Gamma = H_b \cap M$, высекаемая из M произвольным опорным функционалом b, имеет вид $\Gamma = \Gamma_I = M \cap H_I$ для множества индексов $I = I(G) = \{i \mid \Gamma \subset H_{a_i}\}$. Сначала убедимся, что $I(\Gamma) \neq \varnothing$. Как мы видели в предыдущем абзаце, в грани Γ имеется такая точка $p \in \Gamma$, что $a_j(p) > 0$ для всех $j \notin I(\Gamma)$. Если бы множество $I(\Gamma)$ было пусто, то в такой точке p были бы положительны сразу все задающие многогранник M функционалы a_i, а значит, они остались бы положительными и на некоторой кубической окрестности точки p во всём пространстве $\mathbb{A}(V)$. Тем самым, точка p была бы внутренней точкой M и не могла бы лежать ни в какой собственной грани. Мы заключаем, что $I = I(\Gamma) \neq \varnothing$ и $\Gamma \subseteq H_I \cap M = \Gamma_I$. Остаётся доказать обратное включение $\Gamma_I \subseteq \Gamma$. Для этого рассмотрим произвольную точку $q \in \Gamma_I$ и любую такую точку $p \in \Gamma$, в которой $a_j(p) > 0$ для всех $j \notin I$. Тогда точка p лежит внутри грани Γ вместе с некоторой своей кубической окрестностью в пространстве H_I, и отрезок $[q, p]$ можно немного продлить за точку p так, чтобы его новый конец r всё ещё лежал в Γ. Из соотношений $b(p) = 0$ и $b(r) = 0$ вытекает, что $b(q) = 0$. Следовательно, каждая точка $q \in \Gamma_I$ лежит в грани Γ. □

[1] В наименьшем аффинном подпространстве, содержащем грань Γ.

Следствие 13.2
Любой выпуклый многогранник имеет конечное множество граней, и каждая грань любой грани является гранью самого многогранника. □

Следствие 13.3
Крайними точками любого выпуклого многогранника являются его вершины и только они. □

Следствие 13.4
Каждый ограниченный выпуклый многогранник имеет конечное множество вершин и совпадает с их выпуклой оболочкой. □

Следствие 13.5
Непустой выпуклый многогранник M тогда и только тогда является цилиндром[1], когда он не имеет вершин. □

13.5. Выпуклые многогранные конусы. Каждое непустое конечное подмножество $R \subset V$ задаёт в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ замкнутую выпуклую фигуру

$$\sigma_R = \{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_m w_m \mid \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geqslant 0},\ w_i \in R \subset V\}\,, \tag{13-6}$$

которая называется *выпуклым многогранным конусом*, порождённым множеством образующих σ_R.

Упражнение 13.5. Убедитесь, что σ_R действительно является замкнутой выпуклой фигурой в $\mathbb{A}(V)$.

Каждый конус (13-6) не пуст, поскольку содержит нулевой вектор $0 \in V$. Вместе с каждым ненулевым вектором $v \in \sigma_R$ в конусе $\sigma_\mathbb{R}$ лежат и все неотрицательные кратные этого вектора, т. е. замкнутый луч $[0, v) = \mathbb{R}_{\geqslant 0}\, v$. Поэтому любая опорная гиперплоскость H_a конуса σ проходит через нуль: в противном случае из неравенства $a(0) > 0$ и равенства $a(v) = 0$, которое должно выполняться в некоторой точке $v \in H_a \cap \sigma_R \neq \varnothing$, вытекало бы, что $a(w) < 0$ для всех $w \in [0, v) \smallsetminus [0, v]$. Таким образом, все опорные гиперплоскости любого конуса являются *векторными* подпространствами в V и имеют вид H_α для некоторого *линейного* функционала $\alpha \in V^*$. Будучи замкнутой выпуклой фигурой, каждый конус σ_R является пересечением своих опорных полупространств $H^+_\alpha = \{v \in V \mid \alpha(v) \geqslant 0\}$, по всем таким $\alpha \in V^*$, что $\alpha(w) \geqslant 0$ для всех $w \in \sigma_R$ и $H_\alpha \cap \sigma_R \neq \varnothing$. Поэтому для любого вектора $u \notin \sigma_R$ найдётся такой ковектор $\alpha \in V^*$, что $\alpha(u) < 0$, но $\alpha(w) \geqslant 0$ для всех $w \in \sigma_R$. Это наблюдение известно как *лемма Фаркаша*.

Теорема 13.6 (теорема Фаркаша – Минковского – Вейля)
Подмножество $\sigma \subset V$ тогда и только тогда является выпуклым многогранным конусом, когда оно является пересечением конечного числа векторных полупространств

$$H^+_\alpha = \{v \in V \mid \alpha(v) \geqslant 0\}\,, \quad \text{где} \quad \alpha \in V^*. \tag{13-7}$$

В частности, каждый выпуклый многогранный конус является выпуклым многогранником.

Доказательство. Пусть подмножество $\sigma \subset V$ является пересечением конечного числа векторных полупространств (13-7). Тогда σ является выпуклым многогранником в $\mathbb{A}(V)$, содержит нуль $0 \in V$, и вместе с каждой точкой $p \neq 0$ содержит весь замкнутый луч $[0, p)$. Пересечение многогранника σ со стандартным единичным кубом $B_1(0) \subset \mathbb{A}(V)$ с центром в нуле является ограниченным выпуклым многогранником и по сл. 13.4 совпадает с выпуклой оболочкой

[1] См. опр. 13.2 на стр. 159. Являющиеся цилиндрами многогранники также называют *призмами*.

своих вершин, которые образуют конечное множество $R \subset \sigma$. Так как для каждого $v \in \sigma$ существует такое $\lambda \geqslant 0$, что $\lambda v \in \sigma \cap B_1(0)$ является выпуклой комбинацией векторов из R, сам вектор v является неотрицательной линейной комбинацией векторов из R, т. е. $\sigma = \sigma_R$.

Наоборот, любой многогранный конус $\sigma_R \subset V$, как мы видели, является пересечением опорных полупространств вида (13-7). Для того, чтобы неравенство $\alpha(w) \geqslant 0$ выполнялось для всех $w \in \sigma_R$, достаточно, чтобы оно выполнялось для всех $w \in R$. Поэтому множество всех таких ковекторов $\alpha \in V^*$, что $\sigma_R \subset H_\alpha^+$ представляет собою пересечение конечного числа векторных полупространств $H_w^+ = \{\alpha \in V^* \mid \alpha(w) \geqslant 0\}$, задаваемых векторами $w \in R$, рассматриваемыми как линейные функционалы на V^*. По уже доказанному, такое пересечение является выпуклым многогранным конусом $\sigma_{R^\vee} \subset V^*$, порождённым конечным множеством ковекторов $R^\vee \subset V^*$. Так как каждый ковектор $\alpha \in \sigma_{R^\vee}$ является неотрицательной линейной комбинацией ковекторов $\psi \in R^\vee$, все неравенства $\alpha(v) \geqslant 0$, где $\alpha \in \sigma_{R^\vee}$, следуют из конечного набора неравенств $\psi(v) \geqslant 0$, где $\psi \in R^\vee$, т. е. $\sigma = \bigcap_{\psi \in R^\vee} H_\psi^+$. □

13.5.1. Двойственные конусы. Множество линейных функционалов $\alpha \in V^*$, принимающих неотрицательные значения на выпуклом многогранном конусе $\sigma_R \subset V$, является пересечением конечного числа векторных полупространств $H_w^+ \subset V^*$, задаваемых образующими $w \in R$ конуса σ_R, рассматриваемыми как линейные функционалы на V^*, и по теор. 13.6 представляет собою выпуклый многогранный конус

$$\sigma_R^\vee \overset{\text{def}}{=} \{\alpha \in V^* \mid \forall\, v \in \sigma_R \ \alpha(v) \geqslant 0\} = \bigcap_{w \in R} H_w^+ \subset V^*,$$

порождённый конечным набором ковекторов, который мы обозначим через $R^\vee \subset V^*$. Конус $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee} \subset V^*$ называется *двойственным* к конусу $\sigma_R \subset V$. По лемме Фаркаша исходный конус

$$\sigma_R = \{v \in V \mid \forall\, \alpha \in \sigma_{R^\vee} \ \alpha(v) \geqslant 0\} = \bigcap_{\alpha \in R^\vee} \alpha^+ \subset V$$

двойствен к своему двойственному конусу. Таким образом, для любого выпуклого многогранного конуса σ выполняется равенство $\sigma^{\vee\vee} = \sigma$. Множество $R^\vee \subset V^*$ образующих двойственного к σ_R конуса $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee}$ состоит из таких ковекторов $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in V^*$, что конус $\sigma_R = H_{\alpha_1}^+ \cap \ldots \cap H_{\alpha_1}^+$.

13.5.2. Проективный и асимптотический конусы выпуклого многогранника. Вложим $\mathbb{R}^n$ со стандартными базисом $e_1, \dots, e_n$ и координатами $(x_1, \dots, x_n)$ в этом базисе в $(n+1)$-мерное пространство $W = \mathbb{R}^{n+1}$ с базисом $e_0, e_1, \dots, e_n$ и координатами $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ в качестве векторного подпространства $V \subset W$, задаваемого уравнением $x_0 = 0$, и обозначим через $U = e_0 + V$ аффинную гиперплоскость, заданную уравнением $x_0 = 1$. Каждый выпуклый многогранник $M = H_{a_1}^+ \cap \ldots \cap H_{a_m}^+ \subset \mathbb{R}^n$, задаваемый неоднородными неравенствами

$$b_i + \alpha_{i1}x_1 + \cdots + \alpha_{in}x_n \geqslant 0\,, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{13-8}$$

на координаты $(x_1, \dots, x_n)$ является пересечением аффинной гиперплоскости U с выпуклым многогранным конусом $\overline{M} \subset W$, который задаётся в векторном пространстве $W = \mathbb{R}^{n+1}$ однородными неравенствами

$$b_0 x_0 + \alpha_{i1}x_1 + \cdots + \alpha_{in}x_n \geqslant 0\,, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{13-9}$$

на координаты $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, см. рис. 13◇6 на стр. 166. Конус $\overline{M}$ называется *проективным конусом* многогранника M. Его пересечение с векторным подпространством $V \subset W$, которое задаётся уравнением $x_0 = 0$ и является направляющим векторным подпространством аффинной гиперплоскости $U = e_0 + V \subset W$, называется *асимптотическим конусом* или *конусом рецессии* многогранника M и обозначается $M_\infty \overset{\text{def}}{=} \overline{M} \cap V$. Конус M_∞ описывается в векторном пространстве $V = \mathbb{R}^n$ однородными неравенствами

$$\alpha_{i1}x_1 + \dots + \alpha_{in}x_n \geqslant 0\,, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i \leqslant m\,,$$

в которые превращаются неравенства (13-9) при $x_0 = 0$ и которые получаются удалением свободных членов из неоднородных неравенств (13-8). Таким образом, асимптотический конус $M_\infty = \sigma^\vee_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}$ двойствен конусу $\sigma_{\alpha_1,\dots,\alpha_m} \subset V^*$, порождённому дифференциалами $\alpha_i = D_{a_i}$ аффинных функционалов a_i, задающих многогранник M.

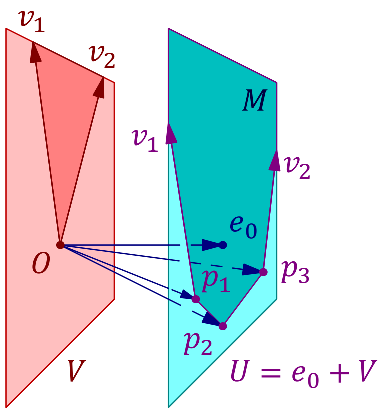

Рис. 13◇6. Конус $\overline{M}$.

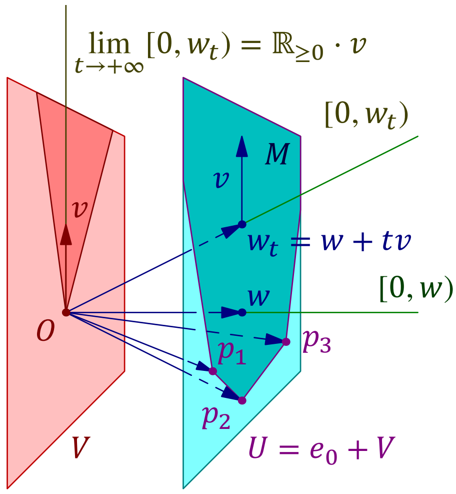

Рис. 13◇7. Конус M_∞.

Геометрически, проективный конус $\overline{M}$ непустого многогранника M является замыканием объединения всех лучей $[0, w)$, где $w \in M$, а асимптотический конус M_∞ образован пределами $[0, v) = \lim\limits_{t\to+\infty}[0, w_t)$ таких лучей, проходящих через переменную точку $w_t = w + tv \in M$, которая стартует при $t = 0$ из некоторой точки $w \in M$ и уходит при $t \to +\infty$ на бесконечность в направлении вектора $v \in V$, оставаясь всё время внутри M, см. рис. 13◇7.

Упражнение 13.6. Убедитесь в этом и покажите, что асимптотический конус M_∞ непустого многогранника M состоит из всех тех векторов $v \in V$, которые обладают следующими эквивалентными свойствами[1]: (1) для любой точки $p \in M$ точка $p + v$ тоже лежит в M (2) для любой точки $p \in M$ луч $\{p + tv \mid t \geqslant 0\}$ содержится в M (3) M содержит какой-нибудь луч $[p, q)$ с направляющим вектором $\overrightarrow{pq} = v$.

Теорема 13.7 (теорема Минковского – Вейля)
Выпуклая оболочка любого конечного набора точек в $\mathbb{R}^n$ является ограниченным выпуклым многогранником. Наоборот, всякий компактный выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$ является выпуклой оболочкой конечного множества точек, а именно — своих вершин.

Доказательство. Последнее утверждение уже было установлено нами в сл. 13.4 на стр. 164. Докажем первое. Вложим $\mathbb{R}^n$ в векторное пространство $W = \mathbb{R}\,e_0 \oplus \mathbb{R}^n$ в качестве аффинной гиперплоскости U с уравнением $x_0 = 1$, как это было объяснено выше. Выпуклая оболочка любого

[1] Направления таких векторов v называют *асимптотическими* или *направлениями рецессии*.

конечного множества $P \subset U$ ограничена, так как содержится в любом содержащем P кубе, и высекается из аффинной гиперплоскости U конусом $\sigma_P \subset W$, поскольку каждая выпуклая барицентрическая комбинация $\sum x_i p_i$ точек $p_i \in P$ лежит в конусе σ_P, и наоборот, для любого ненулевого вектора $w = \sum \lambda_i p_i \in \sigma_P$ пересечение луча $[0, w)$ с аффинной гиперплоскостью $x_0 = 1$ происходит в точке $w / x_0(w) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_k)^{-1} \sum \lambda_i p_i$, которая является выпуклой барицентрической комбинацией точек p_i, так как все $\lambda_i \geqslant 0$. По теор. 13.6 конус σ_P является выпуклым многогранником. Поэтому $M = \sigma_P \cap U$ тоже является выпуклым многогранником. □

Теорема 13.8 (разложение Моцкина)
Всякий выпуклый многогранник $M \subset \mathbb{R}^n$ раскладывается в сумму

$$M = \operatorname{conv} P + M_\infty = \{p + v \mid p \in \operatorname{conv} P,\ v \in M_\infty\}\,,$$

где $P \subset M$ — некоторое конечное подмножество, а $M_\infty = \sigma^\vee_{\alpha_1,\dots,\alpha_m} \subset V$ — асимптотический конус многогранника M. Иначе говоря, каждый выпуклый многогранник является объединением семейства своих асимптотических конусов, отложенных от точек некоторого компактного выпуклого многогранника (возможно, пустого или состоящего из одной точки).

Доказательство. Как и выше, отождествим $\mathbb{R}^n$ с аффинной гиперплоскостью U, которая задаётся в $(n+1)$-мерном пространстве $W = \mathbb{R}\, e_0 \oplus \mathbb{R}^n$ уравнением $x_0 = 1$, и обозначим через $V \subset W$ направляющее векторное подпространство гиперплоскости U, которое задаётся в W уравнением $x_0 = 0$. По теор. 13.6 на стр. 164 проективный конус $\overline{M} = \sigma_S$ порождается некоторым конечным множеством векторов $S \subset W$. Высекаемая векторным подпространством $V \subset W$ грань $M_\infty = V \cap \overline{M}$ проективного конуса $\overline{M}$, будучи пересечением конусов с общей вершиной, также представляет собою конус $\sigma_R \subset V$, порождённый некоторым конечным множеством векторов $R = S \cap V$. Умножая все не лежащие в V образующие проективного конуса $\overline{M}$ на положительные константы, мы можем и будем считать, что все они лежит в U, а значит, и в M. Обозначим множество таких образующих через $P \overset{\text{def}}{=} S \smallsetminus R \subset M \subset U$. Тогда $\overline{M} = \sigma_{P \sqcup R} = \{p + r\,, \mid p \in \sigma_P,\ r \in \sigma_R\}$. Луч $[0, p + r)$, где $p \in \sigma_P$, $r \in \sigma_R$, пересекает аффинную гиперплоскость U если и только если $p \neq 0$, и в этом случае точка пересечения $(p + r)/x_0(p + r) = (p + r)/x_0(p)$ является суммой точки $p/x_0(p) \in \operatorname{conv} P$ и вектора $r/x_0(p) \in \sigma_R = M_\infty$. □

Следствие 13.6
Следующие свойства непустого многогранника $M = H^+_{a_1} \cap \ldots \cap H^+_{a_m}$, задаваемого аффинными функционалами $a_i = b_i + \alpha_i$ эквивалентны:

$$M \text{ ограничен} \quad\iff\quad \text{конус } M_\infty = 0 \quad\iff\quad \text{конус } \sigma_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = V^*.$$

□

13.5.3. Коасимптотический конус многогранника. Рассмотрим выпуклый многогранник

$$M = H^+_{a_1} \cap \ldots \cap H^+_{a_m} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid b + Av \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}^n\,, \tag{13-10}$$

как прообраз положительного гипероктанта $\mathbb{R}^m_{\geqslant 0} \subset \mathbb{R}^m$ при аффинном отображении[1]

$$a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\,, \quad x \mapsto Ax + b\,,$$

[1] Ср. с n° 13.4.1 на стр. 161.

с дифференциалом $D_a = A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$. Двойственное к дифференциалу линейное отображение[1] $D_a^* = A^t: \mathbb{R}^{n*} \to \mathbb{R}^{m*}$, $y \mapsto yA$, переводит стандартные базисные ковекторы $e_i^* \in \mathbb{R}^{m*}$ в линейные функционалы $\alpha_i = D_{a_i}$, координатами которых в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^{n*}$ являются строки матрицы A. Ядро $\ker A^t = \{y \in \mathbb{R}^{m*} \mid yA = 0\}$ состоит из всех *линейных соотношений* между функционалами[2] α_i или, что то же самое, между строками матрицы A. Пересечение ядра $\ker A^t$ с положительным гипероктантом $\mathbb{R}^{m\,*}_{\geqslant 0}$ называется *коасимптотическим конусом* многогранника M и обозначается

$$\varkappa_M \overset{\text{def}}{=} \ker A^t \cap \mathbb{R}^{m\,*}_{\geqslant 0}\,.$$

Он зависит только от линейного отображения $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, но не от вектора $b \in \mathbb{R}^m$. Как мы уже отмечали в n° 13.4.1 на стр. 161, многогранник $M \subset \mathbb{R}^n$ с точностью до параллельного переноса определяется классом $[b]_{\operatorname{im} A} = b + \operatorname{im} A$ столбца $b \in \mathbb{R}^m$ в фактор пространстве $\mathbb{R}^m / \operatorname{im} A$, которое по сл. 7.5 на стр. 91 канонически двойственно пространству $\ker A^t$. Таким образом, класс $[b]_{\operatorname{im} A}$ может рассматриваться как линейный функционал

$$[b]_{\operatorname{im} A}:\ \ker A^t \to \mathbb{R}\,, \quad y \mapsto yb\,.$$

Предложение 13.3
Двойственный к коасимптотическому конус $\varkappa_M^\vee \subset \mathbb{R}^m/\operatorname{im} A$ образован всеми такими классами $b + \operatorname{im} A \in \mathbb{R}^m/\operatorname{im} A$, что многогранник $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid b + Ax \geqslant 0\}$ не пуст.

Доказательство. Каждый столбец $x \in M$ удовлетворяет неравенствам $Ax + b \geqslant 0$. Поэтому для любого ковектора $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{m*}$, у которого все $y_i \geqslant 0$, выполняется неравенство

$$y(Ax + b) = yAx + yb \geqslant 0\,. \tag{13-11}$$

Если вдобавок $yA = 0$, то это неравенство превращается в $yb \geqslant 0$. Таким образом, если $M \neq \varnothing$, то для всех $y \in \varkappa_M$ выполняется неравенство $yb \geqslant 0$, означающее, что $[b]_{\operatorname{im} A} \in \varkappa_M^\vee$. Наоборот, если $[b]_{\operatorname{im} A} \notin \varkappa_M^\vee$, то по лемме Фаркаша[3] найдётся такой $z \in \varkappa_M$, что $zb < 0$, и следовательно $z(Ax + b) = zb < 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Но, как мы видели выше, при $z \in \varkappa_M$ и $x \in M$ выполняется противоположное неравенство (13-11). Стало быть, $M = \varnothing$. □

13.5.4. Грани конусов. Условимся, что помимо собственных граней, высекаемых из конуса его опорными гиперплоскостями H_α, где $\alpha \in V^*$, у каждого конуса $\sigma \subset V$ имеется также и *несобственная* грань $\sigma = V \cap \sigma$ размерности $\dim \sigma$, высекаемая нулевым ковектором $0 \in V^*$. Для каждой грани $\Gamma \subset \sigma_R$ обозначим через $L(\Gamma) \subset V$ её линейную оболочку.

Предложение 13.4
Каждая грань Γ конуса σ_R является конусом, порождённым множеством $R \cap \Gamma$ лежащих в этой грани образующих конуса σ_R, причём это множество линейно порождает векторное пространство $L(\Gamma)$.

[1] См. n° 7.3 на стр. 90.
[2] В том смысле, что строка $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{m*}$ лежит в $\ker A^t$ если и только если в $\mathbb{R}^{n*}$ выполняется равенство $y_1\alpha_1 + \dots + y_m\alpha_m = 0$.
[3] См. n° 13.5 на стр. 164.

Доказательство. По теор. 13.5 на стр. 163 каждая грань Γ конуса σ_R представляет собою пересечение $\Gamma = \sigma_R \cap L(\Gamma)$ и, тем самым, тоже является конусом. Достаточно убедиться, что в представлении каждого вектора $v \in \Gamma$ в виде неотрицательной линейной комбинации векторов из R ненулевые коэффициенты могут иметь лишь образующие $w \in R \cap \Gamma$. Для этого представим конус σ_R в виде пересечения $\sigma_R = \bigcap_{\alpha \in R^\vee} H_\alpha^+$ полупространств, заданных конечным набором ковекторов $R^\vee \subset V^*$, и обозначим через $R^\vee(\Gamma) = R^\vee \cap \operatorname{Ann} \Gamma$ множество всех тех ковекторов $\alpha \in R^\vee$, которые тождественно зануляются на грани Γ. Тогда по той же теор. 13.5 $L(G) = \operatorname{Ann} R^\vee(\Gamma)$. Тем самым, для каждой образующей $w' \in R \smallsetminus \Gamma = R \smallsetminus L(\Gamma)$ найдётся такой функционал $\alpha \in R^\vee(\Gamma)$, что $\alpha(w') > 0$. Если бы образующая w' входила с положительным коэффициентом в разложение какого-нибудь вектора $v \in \Gamma$, то значение $\alpha(v)$ было бы строго положительным, что невозможно, поскольку α аннулирует грань Γ. □

Упражнение 13.7. Приведите пример, показывающий, что не каждое непустое подмножество $I \subset R$ порождает конус, являющийся гранью конуса σ_R.

Предложение 13.5 (двойственность между гранями двойственных конусов)
Для любой пары двойственных конусов $\sigma_R \subset V$ и $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee} \subset V^*$ при всех $0 \leqslant k \leqslant \dim \sigma$ имеется оборачивающая включения биекция между k-мерными гранями конуса σ_R и $(\dim V - k)$-мерными гранями конуса $\sigma_R^\vee$, переводящая каждую грань Γ конуса σ в пересечение $\sigma^\vee \cap \operatorname{Ann} \Gamma$ двойственного конуса с аннулятором грани Γ. В частности, одномерные рёбра каждого из конусов являются уравнениями $(n-1)$-мерных граней двойственного конуса и наоборот.

Доказательство. Каждая образующая $w \in R \cap \Gamma$ любой грани $\Gamma = \sigma_{R\cap\Gamma}$ конуса σ_R является опорным функционалом для двойственного конуса $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee}$. Поэтому по теор. 13.5 на стр. 163 подпространство $\operatorname{Ann} \Gamma = \operatorname{Ann}(R \cap \Gamma) \subset V^*$ высекает из двойственного конуса $\sigma_R^\vee$ некоторую грань. Обозначим её $\Gamma^\vee = \sigma_{R^\vee} \cap \operatorname{Ann} \Gamma$. По предл. 13.4 эта грань представляет собою конус $\sigma_{R^\vee \cap \Gamma^\vee}$, порождённый множеством $R^\vee \cap \operatorname{Ann} \Gamma$ всех аннулирующих грань Γ образующих конуса $\sigma_{R^\vee}$, причём множество $R^\vee \cap \operatorname{Ann} \Gamma$ линейно порождает линейную оболочку $L(\Gamma^\vee) = \operatorname{Ann} L(\Gamma)$ грани $\Gamma^\vee$. Так как $\operatorname{Ann} \Gamma^\vee = \operatorname{Ann} L(\Gamma^\vee) = L(\Gamma)$, двойственная к $\Gamma^\vee$ грань $\Gamma^{\vee\vee} = \sigma_R \cap \operatorname{Ann} \Gamma^\vee$ конуса σ_R совпадает с Γ. Тем самым, отображение $\Gamma \mapsto \Gamma^\vee$ инволютивно, а значит, биективно. □

Замечание 13.1. В предл. 13.5 *не предполагается* равенства $\dim \sigma_R = \dim V$. Например, одномерный конус $\sigma_v = \{tv \mid t \geqslant 0\}$ представляет собою луч, выпущенный из нуля в направлении вектора v и имеет две грани — нульмерную грань 0 и одномерную грань, совпадающую с самим этим лучом. Двойственный ему конус $\sigma_v^\vee = H_v^+ \subset V^*$ является векторным полупространством и тоже имеет две грани: n-мерную грань $\sigma_v^\vee \cap \operatorname{Ann} 0 = H_v^+ \cap V^* = H_v^+$ и $(n-1)$-мерную грань $\sigma_v^\vee \cap \operatorname{Ann} v = H_v$.

Упр. 13.6. Если $w = e_0 + v \in M$, то $\overline{a}_i(w) = a_i(e_0) + \alpha_i(v) \geqslant 0$ при всех i, поэтому $w \in \overline{M}$, а с ним и $[0, w) \subset \overline{M}$. Наоборот, если $w = \lambda e_0 v \in \overline{M}$, то при $\lambda \neq 0$ из неравенств $\overline{a}_i(w) = \lambda a_i(e_0) + \alpha_i(v) \geqslant 0$ вытекает, что точка $[0, w) \cap U_\xi = \lambda^{-1} w = e_0 + \lambda^{-1} v \in M$, а при $\lambda = 0$ луч $[0, v) \subset V$ является пределом при $s \to +\infty$ пересекающих многогранник M лучей $[0, w_s)$, где $w_s = w + sv$, поскольку при всех $s \geqslant 0$ точка $w_s = w + sv \in M$, коль скоро $w \in M$ и $\alpha_i(v) \geqslant 0$ при всех i, а луч $[0, w_s]$ имеет при каждом $s > 0$ ненулевой направляющий вектор $v_s = s^{-1} w + v$, стремящийся к v при $s \to \infty$. Для доказательства эквивалентности свойств (1) – (3) заметим, что если $\alpha_i(v) < 0$ хотя бы для одного функционала α_i, то для всех $p \in \mathbb{A}(V)$ при всех $\lambda \gg 0$ выполняется неравенство $a_i(p + \lambda v) = a_i(p) + \lambda \alpha_i(v) < 0$, и ни одно из свойств (1) – (3) не имеет места. Напротив, если $\alpha_i(v) \geqslant 0$ для всех i, то для любой точки $p \in M$ при всех $\lambda \geqslant 0$ выполняются неравенства $a_i(p + \lambda v) = a_i(p) + \lambda \alpha_i(v) \geqslant a_i(p) \geqslant 0$, а с ними и каждое из свойств (1) – (3).

Упр. 13.7. Четырёхгранный конус в $\mathbb{R}^3$, порождённый векторами

$$v_1 = e_1 + e_2 + e_3\,, \quad v_2 = e_1 + e_2 - e_3\,, \quad v_3 = e_1 - e_2 - e_3\,, \quad v_4 = e_1 - e_2 + e_3\,,$$

не имеет двумерной грани, порождённой векторами v_1 и v_3.