

§12. Линейные отображения евклидовых пространств

Всюду в этом параграфе речь по-прежнему идёт про конечномерные евклидовы векторные пространства над полем \mathbb{R} .

12.1. Ортогональные операторы. Линейный оператор $F : V \rightarrow V$ на евклидовом векторном пространстве V называется *ортогональным* или *изометрией*, если он сохраняет длины векторов, т. е. $|Fv| = |v|$ для каждого $v \in V$. Поскольку скалярное произведение однозначно выражается через длины векторов по формуле

$$(u, w) = \frac{1}{2}(|u + w|^2 - |u|^2 - |w|^2),$$

каждый ортогональный оператор F автоматически сохраняет скалярные произведения, т. е.

$$\forall u, w \in V \quad (Fu, Fw) = (u, w).$$

Сохранение скалярных произведений влечёт за собою сохранение углов между векторами и любых других величин, выражающихся через скалярные произведения. Например, каждый ортогональный оператор сохраняет евклидов объём параллелепипеда, равный корню из определителя Грама¹. Поэтому определитель любого ортогонального оператора равен ± 1 . В частности, все ортогональные операторы обратимы и составляют в полной линейной группе пространства V подгруппу, которая обозначается $O(V) \subset GL(V)$ и называется *ортогональной группой* евклидова пространства V . Сохраняющие ориентацию ортогональные операторы называются *собственными*. Они образуют в ортогональной группе подгруппу, которая обозначается

$$SO(V) \stackrel{\text{def}}{=} O(V) \cap SL(V) = \{F \in O(V) \mid \det F = 1\}$$

и называется *специальной* или *собственной* ортогональной группой. Ортогональные операторы определителя -1 , меняющие ориентацию пространства на противоположную, называются *несобственными*.

ПРИМЕР 12.1 (ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ)

Оператор $-\text{Id} : v \mapsto -v$ является ортогональным на любом евклидовом векторном пространстве V . Он собственный, если $\dim V$ чётна, и несобственный, если $\dim V$ нечётна.

УПРАЖНЕНИЕ 12.1. Покажите, что ортогональная группа одномерного пространства исчерпывается операторами $\pm \text{Id}$.

ПРИМЕР 12.2 (СИММЕТРИИ)

Как мы видели в н° 11.3.2 на стр. 135, с каждым векторным подпространством $U \subset V$ связано разложение в ортогональную прямую сумму $V = U \oplus U^\perp$. Обозначим через $s_U : V \rightarrow V$ линейное отображение, тождественно действующее на U и умножающее все векторы из U^\perp на -1 , т. е. переводящее произвольный вектор $v = v_U + v_{U^\perp} \in U \oplus U^\perp = V$ в вектор

$$s_U(v) = v_U - v_{U^\perp} = v - 2v_{U^\perp}. \quad (12-1)$$

Так как $|s_U(v)|^2 = |u_v - u_v^\perp|^2 = |u_v|^2 + |u_v^\perp|^2 = |u_v + u_v^\perp|^2 = |v|^2$, оператор s_U ортогонален. Он называется *симметрией* относительно подпространства U . При $U = 0$ получается центральная

¹См. н° 11.2.1 на стр. 134.

симметрия из предыдущего [прим. 12.1](#). В общем случае оператор s_U собственный если и только если коразмерность подпространства U в V чётна. Все операторы σ_U *инволютивны*, т. е.

$$\sigma_U^2 = \text{Id}_V.$$

12.1.1. Отражения в гиперплоскостях. Важнейшим специальным случаем симметрии является *отражение в гиперплоскости* $U = u^\perp$, перпендикулярной какому-либо ненулевому вектору $u \in V$. Оно обозначается через σ_u и действует по формуле

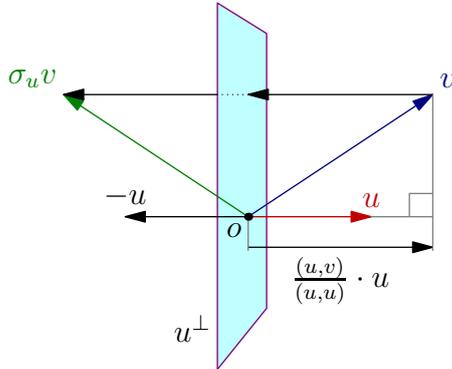


Рис. 12.1. Отражение в гиперплоскости u^\perp .

$$\sigma_u(v) = v - 2 \frac{(u, v)}{(u, u)} \cdot u. \quad (12-2)$$

в которую превращается предыдущая формула (12-1) при $U^\perp = \mathbb{R} \cdot u$. Два отражения σ_u и σ_w совпадают тогда и только тогда, когда задающие их ненулевые векторы u и w пропорциональны. Отражения в гиперплоскостях являются несобственными изометриями. Любые два различных ненулевых вектора $a \neq b$ одинаковой длины $|a| = |b|$ переводятся друг в друга отражением σ_{a-b} относительно срединного перпендикуляра¹ к отрезку $[a, b]$ в $\mathbb{A}(V)$.

УПРАЖНЕНИЕ 12.2. Убедитесь в этом.

ТЕОРЕМА 12.1

Каждый нетождественный ортогональный оператор на n -мерном евклидовом векторном пространстве V является композицией не более n отражений в гиперплоскостях.

Доказательство. Индукция по $n = \dim V$. Случай $n = 1$ покрывается [упр. 12.1](#). Пусть $n > 1$ и $F(v) \neq v$ для некоторого ненулевого вектора v . Обозначим через σ отражение, переводящее $F(v)$ в v . Ортогональный оператор $G = \sigma \circ F$ оставляет вектор v на месте и, тем самым, переводит в себя гиперплоскость v^\perp . По индукции, ограничение $G|_{v^\perp} = \bar{\sigma}_k \circ \dots \circ \bar{\sigma}_1$ является композицией $k \leq (n-1)$ отражений $\bar{\sigma}_i : v^\perp \rightarrow v^\perp$ в $(n-2)$ -мерных гиперплоскостях, лежащих в v^\perp . Каждое отражение $\bar{\sigma}_i$ является ограничением на подпространство v^\perp отражения $\sigma_i : V \rightarrow V$ в $(n-1)$ -й гиперплоскости, порождённой вектором v и $(n-2)$ -мерным зеркалом отражения $\bar{\sigma}_i$. Так как вектор v неподвижен при всех отражениях σ_i , оператор $G = \sigma_k \circ \dots \circ \sigma_1 : V \rightarrow V$ является композицией отражений σ_i . Следовательно, $F = \sigma \circ G$ является композицией $k+1 \leq n$ отражений. \square

СЛЕДСТВИЕ 12.1

Всякий собственный ортогональный оператор является композицией чётного, а всякий несобственный — нечётного числа отражений в гиперплоскостях. \square

ПРИМЕР 12.3 (СОБСТВЕННЫЕ ИЗОМЕТРИИ ТРЁХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА)

Каждый нетождественный собственный ортогональный оператор F в трёхмерном евклидовом векторном пространстве V является композицией $F = \sigma_{u_2} \circ \sigma_{u_1}$ отражений в двух различных

¹См. [прим. 11.2](#) на стр. 132.

плоскостях u_2^\perp, u_1^\perp , ортогональных непропорциональным векторам u_2, u_1 . Обозначим порождённую этими векторами плоскость через U . Оператор F тождественно действует на прямой

$$U^\perp = u_1^\perp \cap u_2^\perp = \mathbb{R} \cdot [u_1, u_2]$$

с вектором скорости¹ $[u_1, u_2]$. Ортогональная этой прямой гиперплоскость U переводится оператором F в себя, и ограничение $F|_U$ является собственным ортогональным преобразованием этой плоскости, поскольку $\det F = \det F|_U$. В силу предл. 3.5 на стр. 41 каждое собственное ортогональное линейное преобразование плоскости является поворотом.

УПРАЖНЕНИЕ 12.3. Убедитесь, что это поворот на угол $2\angle(u_1, u_2)$ по часовой стрелке, если смотреть вдоль вектора $[u_1, u_2]$.

Мы заключаем, что собственная ортогональная группа трёхмерного евклидова пространства исчерпывается поворотами вокруг прямых. Этот факт известен как теорема Эйлера.

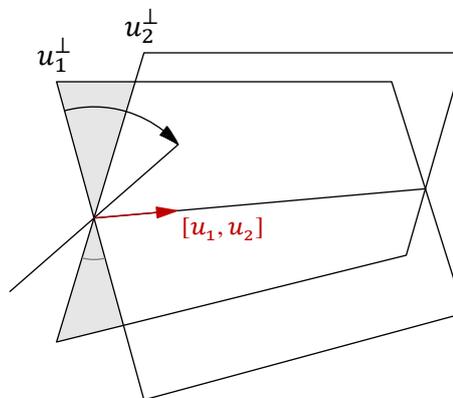


Рис. 12♦2. Поворот.

12.1.2. Ортогональные суммы поворотов. В этом разделе мы построим для любого ортогонального оператора $F : V \rightarrow V$ разложение пространства V в прямую сумму двумерных и одномерных F -инвариантных подпространств $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$, в котором все подпространства попарно ортогональны друг другу и F действует на каждом двумерном подпространстве U_i как поворот на некоторый угол $\varphi_i \in (0, \pi)$, а на каждом одномерном — как Id или $-\text{Id}$. Отметим, что любые два одномерных собственных подпространства с собственным числом 1 можно объединить в двумерную плоскость, на которой F действует поворотом на нулевой угол, а любые два одномерных собственных подпространства с собственным числом -1 — в двумерную плоскость, на которой F действует как поворот на угол π . Поэтому можно считать, что разложение, о котором идёт речь, состоит из двумерных подпространств U_i , на которых F действует поворотами на углы $\varphi_i \in [0, \pi]$, и, может быть, ещё одного или двух одномерных слагаемых, причём когда их два, то на одном из них F действует тождественно, а на другом — умножением на -1 . Оператор F собственный если и только если таких одномерных слагаемых либо нет вовсе, либо оно равно одно, и F действует на нём тождественно.

ЛЕММА 12.1

Каждый линейный оператор $F : V \rightarrow V$ на конечномерном вещественном векторном пространстве обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством.

Доказательство. Рассмотрим произвольный ненулевой вектор $v \in V$ и образуем из него $n + 1$ векторов v, Fv, F^2v, \dots, F^nv , где $n = \dim V$ и $F^k v$ обозначает результат k -кратного последовательного применения оператора F к вектору v . Поскольку эти векторы линейно зависимы, найдутся такие $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, что $(F^k + a_1 F^{k-1} + \dots + a_{k-1} F + a_k)v = 0$. Заключённый в скобки линейный оператор является результатом подстановки $t = F$ в многочлен $f(t) = t^k + a_1 t^{k-1} + \dots + a_{k-1} t + a_k \in \mathbb{R}[t]$. Такой многочлен представляет собою произведение

¹См. прим. 11.7 на стр. 140.

$f(t) = g_1(t) \cdot g_2(t) \cdot \dots \cdot g_m(t)$ линейных двучленов вида $t - \alpha$ и квадратных трёхчленов вида $t^2 - \alpha t - \beta$ с вещественными коэффициентами. Подставляя в это разложение F и применяя полученный оператор к вектору v , мы заключаем, что $g_1(F) \circ g_2(F) \circ \dots \circ g_m(F) v = 0$. Рассмотрим наименьшее k , для которого вектор $w = g_{k+1}(F) \circ \dots \circ g_m(F) v$ всё ещё отличен от нуля. Тогда $g_k(F)w = 0$. Для $g_k(F) = F - \alpha$ это значит, что $F(w) = \alpha w$, т. е. одномерное подпространство $\mathbb{R} \cdot w$ переводится оператором F в себя. Для $g_k(F) = F^2 - \alpha F - \beta$ имеем $F(F(w)) = \alpha F(w) + \beta w$, т. е. линейная оболочка векторов w и $F(w)$ переводится оператором F в себя. \square

ТЕОРЕМА 12.2

Каждый ортогональный линейный оператор F на конечномерном евклидовом пространстве записывается в подходящем ортонормальном базисе матрицей, на главной диагонали которой стоят числа ± 1 и 2×2 блоки вида

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix}, \quad \text{где } 0 < \varphi_i < \pi, \quad (12-3)$$

а все остальные элементы равны нулю. С точностью до перестановки блоков и диагональных элементов эта матрица не зависит от выбора ортонормального базиса, в котором оператор имеет матрицу такого вида.

Доказательство теор. 12.2. Разложение пространства V в ортогональную прямую сумму F -инвариантных одномерных и двумерных подпространств U_i строится индукцией по $\dim V$. Случаи $\dim V = 1, 2$ уже были разобраны в [упр. 12.1](#) на стр. 141 и [предл. 3.5](#) на стр. 41 соответственно. Пусть $\dim V \geq 3$. Согласно [лем. 12.1](#) оператор $F : V \rightarrow V$ переводит в себя некоторое одномерное или двумерное подпространство $U \subset V$. Поскольку F сохраняет скалярное произведение, ортогонал U^\perp к подпространству U тоже переводится оператором F в себя. По индукции, ограничения F на U и на U^\perp обладают нужными разложениями. Складывая эти разложения вместе, получаем требуемое разложение для $V = U \oplus U^\perp$. Если выбрать в каждом подпространстве U_i ортонормальный базис и соединить эти базисы в один ортонормальный базис e пространства V , то оператор F запишется в этом базисе матрицей F_e , состоящей из расположенных на главной диагонали блоков вида (12-3), и, может быть, ещё нескольких диагональных элементов вида ± 1 . Поэтому характеристический многочлен оператора F раскладывается в произведение характеристических многочленов этих блоков:

$$\det \begin{pmatrix} t - \cos \varphi_i & \sin \varphi_i \\ -\sin \varphi_i & t - \cos \varphi_i \end{pmatrix} = t^2 - 2t \cos \varphi_i + 1$$

и, возможно, ещё нескольких линейных множителей вида $t \pm 1$. Каждому блоку (12-3) при этом отвечает пара сопряжённых корней $\cos \varphi_i \pm i \sin \varphi_i$ многочлена $\chi_F(t)$ в поле \mathbb{C} , а диагональным элементам ± 1 — корни ± 1 , причём таким образом получаются все комплексные корни многочлена $\chi_F(t)$ с учётом их кратностей. Поскольку характеристический многочлен не зависит от выбора базиса, набор отличных от нуля и π углов поворотов и количества стоящих на диагонали чисел $+1$ и -1 не зависят от способа разложения. \square

ПРИМЕР 12.4 (несобственные ортогональные операторы в трёхмерном пространстве)

Согласно [теор. 12.2](#) каждый несобственный ортогональный оператор на трёхмерном евклидо-

вом пространстве записывается в подходящем ортонормальном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ 0 & \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix}, \quad \text{где } 0 \leq \varphi_i \leq \pi,$$

и является композицией поворота вокруг прямой с направляющим вектором e_1 и отражения в перпендикулярной оси поворота плоскости e_1^\perp .

Пример 12.5 (движения трёхмерного евклидова аффинного пространства)

Напомню¹, что эндоморфизм $F : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$ аффинного пространства $\mathbb{A}(V)$, ассоциированного с евклидовым векторным пространством V , называется *движением*, если он сохраняет расстояния между точками. Каждое движение автоматически биективно и переводит прямые в прямые, а значит, является аффинным преобразованием², т. е. композицией $F = \tau_v \circ G_p$ параллельного переноса τ_v на некоторый вектор $v \in V$ и линейного ортогонального преобразования $G_p : V \rightarrow V$, оставляющего на месте некоторую точку $p \in \mathbb{A}(V)$. Пусть теперь $\dim V = 3$.

Если движение F собственное³, то ортогональный оператор G_p тоже собственный и является поворотом $\varrho_{\ell, \varphi}$ на угол φ (возможно, нулевой) вокруг некоторой проходящей через точку p прямой ℓ . Разложим вектор сдвига в сумму $v = u + w$ вектора u , параллельного прямой ℓ , и вектора w перпендикулярного прямой ℓ . Композиция $\tau_w \circ \varrho_{\ell, \varphi}$ переводит в себя каждую перпендикулярную прямой ℓ плоскость Π и действует в ней как композиция поворота со сдвигом, т. е. как поворот на тот же угол φ , но с другим центром⁴, зависящим только от вектора w . Таким образом, композиция $\tau_w \circ \varrho_{\ell, \varphi} = \varrho_{\ell', \varphi}$ является поворотом пространства на тот же угол φ , но относительно прямой ℓ' , которая параллельна оси ℓ поворота G_p . Такой поворот перестановочен со сдвигом τ_u вдоль оси поворота и композиция

$$F = \tau_v \circ G_p = \tau_u \circ \tau_w \circ \varrho_{\ell, \varphi} = \tau_u \circ \varrho_{\ell', \varphi} = \varrho_{\ell', \varphi} \circ \tau_u$$

представляет собою *винтовое движение* — композицию перестановочных друг с другом поворота вокруг прямой и сдвига вдоль этой прямой. Ось винтового движения с ненулевым углом закрутки однозначно характеризуется как единственная прямая в пространстве, переводимая этим движением в себя. Итак, каждое собственное движение пространства есть винтовое движение — возможно, с нулевым вектором сдвига и/или нулевым углом закрутки.

Если движение F несобственное⁵, то ортогональный оператор G_p тоже несобственный и является либо отражением σ_Π в проходящей через точку p плоскости Π , либо композицией такого отражения с поворотом $\varrho_{\ell, \varphi}$ вокруг проходящей через p перпендикулярно плоскости Π прямой ℓ . Раскладывая, как и выше, сдвиг τ_v в композицию сдвигов на перпендикулярный к плоскости Π вектор u и параллельный Π вектор w , мы видим, что в первом случае композиция $\tau_u \sigma_\Pi = \sigma_{\Pi'}$ является отражением в плоскости $\Pi' = \Pi + u/2$, полученной из Π сдвигом на вектор⁶ $u/2$, и движение $F = \tau_v \circ G_p = \tau_w \circ \tau_u \circ \sigma_\Pi = \tau_w \circ \sigma_{\Pi'} = \sigma_{\Pi'} \circ \tau_w$ представляет собою *скользящую*

¹См. н° 3.4 на стр. 40.

²См. н° 2.1 на стр. 22.

³Т. е. сохраняет ориентацию.

⁴См. н° 3.4.2 на стр. 41.

⁵Т. е. меняет ориентацию на противоположную.

⁶Ибо $\sigma_{\Pi'} \circ \sigma_\Pi = \tau_u$, см. н° 3.4.2 на стр. 41.

симметрию — композицию отражения в плоскости с параллельным этой плоскости сдвигом. Во втором случае, в силу уже сказанного,

$$F = \tau_v \circ G_p = \tau_w \circ \tau_u \circ \sigma_{\Pi} \circ \varrho_{\ell, \varphi} = \tau_w \circ \sigma_{\Pi'} \circ \varrho_{\ell, \varphi} = \sigma_{\Pi'} \circ \tau_w \circ \varrho_{\ell, \varphi} = \sigma_{\Pi'} \circ \varrho_{\ell', \varphi}$$

представляет собою композицию перестановочных друг с другом поворота вокруг прямой и отражения в плоскости, перпендикулярной оси поворота. В обоих случаях зеркало отражения однозначно описывается как геометрическое место середин отрезков, соединяющих точки пространства с их образами при движении F .

12.2. Евклидово сопряжение линейных отображений. С каждым линейным отображением $F : U \rightarrow W$ между евклидовыми пространствами U, W связано *евклидово сопряжённое* отображение $F^\times : W \rightarrow U$, которое однозначно характеризуется тем, что для всех $u \in U, w \in W$

$$(Fu, w) = (u, F^\times w). \quad (12-4)$$

Предложение 12.1

Для любого линейного отображения евклидовых пространств $F : U \rightarrow W$ удовлетворяющее равенству (12-4) линейное отображение $F^\times : W \rightarrow U$ существует и единственно. Матрицы F_{wu} и F_{uw}^\times отображений F и F^\times в произвольных базисах $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ пространств U и W связаны соотношением

$$F_{wu}^t G_w = G_u F_{uw}^\times, \quad (12-5)$$

где $G_u = \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{u}$ и $G_w = \mathbf{w}^t \cdot \mathbf{w}$ — матрицы Грама базисов \mathbf{u} и \mathbf{w} .

Доказательство. Левая часть (12-4) является результатом применения к вектору $Fu \in W$ линейного функционала $g_w : W \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto (v, w)$, в который переходит вектор $w \in W$ при задаваемом евклидовой структурой на пространстве W изоморфизме $G_W : W \simeq W^*, w \mapsto g_w$, из форм. (11-10) на стр. 134. Композиция $g_w \circ F$ линейного функционала $g_w : W \rightarrow \mathbb{R}$ с линейным отображением $F : U \rightarrow W$ является результатом применения к ковектору $g_w \in W^*$ двойственного к F линейного отображения¹ $F^* : W^* \rightarrow U^*, \xi \mapsto \xi \circ F$. Таким образом, в левой части (12-4) стоит значение ковектора $F^*(g_w) = F^* G_W(w)$ на векторе u . В правой части (12-4) написан результат применения к вектору u ковектора $g_{F^\times w} = G_U F^\times(w)$, в который переходит вектор $F^\times(w) \in U$ при изоморфизме $G_U : U \simeq U^*, u \mapsto g_u$, задаваемом евклидовой структурой на пространстве U . Таким образом, равенство (12-4) равносильно соотношению $F^* G_W = G_U F^\times$, в котором $G_U : U \simeq U^*$ и $G_W : W \simeq W^*$ суть евклидовы корреляции из п° 11.3 на стр. 134, а линейное отображение $F^* : W^* \rightarrow U^*$ двойственно к F . Этому соотношению удовлетворяет ровно одно линейное отображение $F^\times = G_U^{-1} F^* G_W : W \rightarrow U$.

В терминах базисов \mathbf{u} и \mathbf{w} равенство (12-4) равносильно mn соотношениям

$$(Fu_i, w_j) = (u_i, F^\times w_j)$$

на скалярные произведения базисных векторов. Они собираются в матричное равенство

$$G_{F(\mathbf{u}), \mathbf{w}} = G_{\mathbf{u}, F^\times(\mathbf{w})},$$

¹См. п° 7.3 на стр. 89.

где $G_{F(\mathbf{u}), \mathbf{w}} = F(\mathbf{u})^t \cdot \mathbf{w}$ — матрица Грама наборов $F(\mathbf{u}) = (Fu_1, \dots, Fu_n)$ и $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$, а $G_{\mathbf{u}, F^\times(\mathbf{w})} = \mathbf{u}^t \cdot F(\mathbf{w})$ — матрица Грама наборов $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и $F^\times(\mathbf{w}) = (F^\times w_1, \dots, F^\times w_m)$. Поскольку $F(\mathbf{u}) = \mathbf{w} F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$, а $F^\times(\mathbf{w}) = \mathbf{u} F_{\mathbf{u}\mathbf{w}}^\times$, эти матрицы Грама имеют вид

$$G_{F(\mathbf{u}), \mathbf{w}} = F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}^t \mathbf{w}^t \cdot \mathbf{w} = F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}^t G_{\mathbf{w}} \quad \text{и} \quad G_{\mathbf{u}, F^\times(\mathbf{w})} = \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{u} F_{\mathbf{u}\mathbf{w}}^\times = G_{\mathbf{u}} F_{\mathbf{u}\mathbf{w}}^\times.$$

Таким образом, соотношение (12-4) равносильно матричному равенству (12-5). \square

Замечание 12.1. Обратите внимание, что матричное равенство $F_{\mathbf{u}\mathbf{w}}^\times = G_{\mathbf{u}}^{-1} F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}^t G_{\mathbf{w}}$ согласуется с операторным равенством $F^\times = G_U^{-1} F^* G_W$: матрицы Грама $G_{\mathbf{u}}$ и $G_{\mathbf{w}}$ суть матрицы евклидовых корреляций¹ $G_U : U \simeq U^*$ и $G_W : W \simeq W^*$, записанные в парах двойственных базисов \mathbf{u}, \mathbf{u}^* и \mathbf{w}, \mathbf{w}^* пространств U, U^* и W, W^* , а $F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}^t = F_{\mathbf{w}^* \mathbf{u}^*}^*$ есть матрица двойственного к F оператора² $F^* : W^* \rightarrow U^*$, записанная в базисах $\mathbf{w}^*, \mathbf{u}^*$.

Следствие 12.2

В ортонормальных базисах \mathbf{u}, \mathbf{w} пространств U, W матрицы евклидово сопряжённых операторов F и F^\times транспонированы друг другу: $F_{\mathbf{u}\mathbf{w}}^\times = F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}^t$. \square

Предложение 12.2

Для любого линейного отображения $F : U \rightarrow W$ выполняются равенства

$$F^{\times \times} = F, \quad \ker F^\times = (\operatorname{im} F)^\perp, \quad \operatorname{im} F^\times = (\ker F)^\perp,$$

а для любой пары линейных отображений $F : U \rightarrow V, G : V \rightarrow W$ — равенство $(GF)^\times = F^\times G^\times$.

Доказательство. Равенство $F^{\times \times} = F$ вытекает из соотношения (12-4) и симметричности скалярного произведения. Вектор $w \in \ker F^\times$ если и только если для всех $u \in U$ выполняется равенство $(u, F^\times w) = 0$, которое в силу соотношения (12-4) равносильно равенству (Fu, w) , т. е. ортогональности подпространства $\operatorname{im} F$ вектору w . Поэтому $\ker F^\times = (\operatorname{im} F)^\perp$. Написав это равенство для оператора F^\times в роли F и беря ортогонал к обеим частям, получаем равенство $(\ker F)^\perp = \operatorname{im} F^\times$. Последнее утверждение вытекает из равенств $(GFu, w) = (Fu, G^\times w) = (u, F^\times G^\times w)$, выполненных для всех $u \in U, w \in W$. \square

12.3. Самосопряжённые и антисамосопряжённые операторы. В прим. 10.4 на стр. 120 мы видели, что каждое пространство с линейной инволюцией является прямой суммой собственных подпространств с собственными значениями ± 1 . Таким образом,

$$\operatorname{End}(V) = \operatorname{End}^+(V) \oplus \operatorname{End}^-(V), \quad \text{где}$$

$$\operatorname{End}^+(V) \stackrel{\text{def}}{=} \{F : V \rightarrow V \mid F^\times = F\} \quad \text{и} \quad \operatorname{End}^-(V) \stackrel{\text{def}}{=} \{F : V \rightarrow V \mid F^\times = -F\}.$$

Операторы из $\operatorname{End}^+(V)$ называются *самосопряжёнными* и характеризуются тем, что для любых векторов $u, w \in V$ выполняется равенство $(Fu, w) = (u, Fw)$. Матрица такого оператора в ортонормальном базисе симметрична относительно главной диагонали, т. е. не меняется при транспонировании. Операторы из $\operatorname{End}^-(V)$ называются *антисамосопряжёнными* и характеризуются тем, что для любых векторов $u, w \in V$ выполняется равенство $(Fu, w) = -(u, Fw)$. Матрица такого оператора в ортонормальном базисе косимметрична, т. е. меняет при транспонировании знак. Разложение произвольного оператора F в сумму самосопряжённого и антисамосопряжённого задаётся формулой $F = (F + F^\times)/2 + (F - F^\times)/2$.

¹См. упр. 11.4 на стр. 134.

²См. предл. 7.3 на стр. 90.

ЛЕММА 12.2

Если (анти)самосопряжённый линейный оператор $F : V \rightarrow V$ переводит в себя некоторое подпространство $U \subset V$, то он переводит в себя и его ортогонал U^\perp .

Доказательство. Пусть $w \in U^\perp$, т. е. $(u, w) = 0$ для всех $u \in U$. Тогда $(u, Fw) = \pm(Fu, w) = 0$ для всех $u \in U$, ибо $Fu \in U$. Тем самым, $Fw \in U^\perp$. \square

ЛЕММА 12.3

Собственные векторы с разными собственными значениями у самосопряжённого оператора ортогональны друг другу.

Доказательство. Если $Fu = \lambda u$ и $Fw = \mu w$, то из равенства $(Fu, w) = (u, Fw)$ вытекает равенство $(\lambda - \mu) \cdot (u, w) = 0$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 12.4. Покажите, что все одномерные инвариантные подпространства антисамосопряжённого оператора содержатся в его ядре (в частности, у антисамосопряжённого оператора нет ненулевых вещественных собственных чисел).

ТЕОРЕМА 12.3 (ТЕОРЕМА О НОРМАЛЬНОМ БАЗИСЕ)

Каждый самосопряжённый оператор F на конечномерном евклидовом пространстве можно диагонализировать в некотором ортонормальном базисе.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если $\dim V = 1$, доказывать нечего. Если $\dim V = 2$, оператор F задаётся в произвольно взятом ортонормальном базисе e симметричной матрицей

$$F_e = F_e^t = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Её характеристический многочлен $\det(tE - F_e) = t^2 - (a + c) \cdot t + (ac - b^2)$ имеет неотрицательный дискриминант $(a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2$ и вещественные корни. Следовательно, у F есть одномерное инвариантное подпространство $U \subset V$, порождённое ненулевым собственным вектором. По лем. 12.2 ортогональное дополнение U^\perp также является одномерным F -инвариантным подпространством. Выбирая в U и U^\perp базисные векторы единичной длины, получаем ортонормальный базис, в котором матрица оператора F диагональна. При $\dim V \geq 3$ у оператора F имеется одномерное или двумерное инвариантное подпространство $U \subset V$, и его ортогональное дополнение U^\perp тоже F -инвариантно по лем. 12.2. По индукции, в U и U^\perp есть ортонормальные базисы из собственных векторов оператора F . Объединение этих базисов даёт искомый базис в V . \square

ТЕОРЕМА 12.4 (КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД АНТИСАМОСOPЯЖЁННОГО ОПЕРАТОРА)

Каждый антисамосопряжённый оператор F на конечномерном евклидовом пространстве имеет в подходящем ортонормальном базисе матрицу, ненулевые элементы которой исчерпываются расположенными на главной диагонали 2×2 блоками вида

$$\begin{pmatrix} 0 & a_i \\ -a_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } a_i > 0,$$

причём набор этих блоков с точностью до перестановки не зависит от выбора такого базиса.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если $F = 0$, что так при $\dim V = 1$, то доказывать нечего. Если $\dim V = 2$ и $F \neq 0$, то в любом ортонормальном базисе e оператор F имеет антисимметричную матрицу

$$F_e = -F_e^t = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Меняя при необходимости знак у первого базисного вектора, можно считать, что $a > 0$. При $\dim V \geq 3$ у оператора F имеется одномерное или двумерное инвариантное подпространство $U \subset V$, и его ортогональное дополнение U^\perp тоже F -инвариантно по лем. 12.2. По индукции, в U и U^\perp есть ортонормальные базисы, в которых матрицы ограничений $F|_U$ и $F|_{U^\perp}$ имеют требуемый вид. Объединение этих базисов даёт искомый базис в V . Поскольку характеристический многочлен оператора F является произведением монома t^m , где $m = \dim \ker F = \dim V - \operatorname{rk} F$, и неприводимых двучленов $(t^2 + a_i^2)$ по всем диагональным 2×2 блокам матрицы F_e , набор блоков не зависит от выбора базиса в силу единственности разложения на неприводимые множители в $\mathbb{R}[t]$. \square

12.4. Сингулярные числа и сингулярные направления. В этом разделе мы покажем, что каждое линейное отображение $F : U \rightarrow W$ однозначно раскладывается в композицию $F = GSP$ ортогональной проекции $P : U \rightarrow V$ на ортогональное дополнение $V = (\ker F)^\perp \subset U$ к ядру оператора F , невырожденного самосопряжённого оператора $S : V \rightarrow V$, представляющего собою композицию коммутирующих друг с другом растяжений с положительными коэффициентами во взаимно перпендикулярных направлениях, и ортогонального вложения $G : V \hookrightarrow W$. Ортогональные направления, вдоль которых растягивает подпространство $V \subset U$ оператор S , и коэффициенты этих растяжений называются, соответственно, *сингулярными направлениями* и *сингулярными числами* линейного отображения F .

ЛЕММА 12.4

Для любого линейного отображения $F : U \rightarrow W$ между евклидовыми пространствами U, W обе композиции $FF^\times \in \operatorname{End}(W)$, $F^\times F \in \operatorname{End}(U)$ являются самосопряжёнными линейными операторами с неотрицательными собственными числами. Отображение F сюръективно (соотв. инъективно) если и только если все собственные числа оператора FF^\times (соотв. $F^\times F$) строго положительны.

Доказательство. Каждый из операторов FF^\times и $F^\times F$ очевидно самосопряжён и следовательно диагонализуем по теор. 12.3 на стр. 148. Если для некоторого ненулевого вектора $w \in W$ выполняется равенство $FF^\times w = \lambda w$, то $(F^\times w, F^\times w) = (FF^\times w, w) = \lambda \cdot (w, w)$ и либо $w \in \ker F^\times$ и $\lambda = 0$, либо $\lambda = (F^\times w, F^\times w) / (w, w) > 0$. Аналогично, если $F^\times F u = \mu u$ для ненулевого $u \in U$, то либо $\mu = 0$ и $u \in \ker F$, либо $\mu = (F u, F u) / (u, u) > 0$. Поэтому все ненулевые собственные числа каждого из операторов положительны. Если $\operatorname{im} F = W$, то¹ $\ker F^\times = (\operatorname{im} F)^\perp = 0$, откуда все собственные числа оператора FF^\times положительны. Наоборот, если $\operatorname{im} F \neq W$, то $\ker FF^\times \supset \ker F^\times = (\operatorname{im} F)^\perp \neq 0$. Аналогично, если $\ker F = 0$, то все собственные числа оператора $F^\times F$ строго положительны, и наоборот, если $\ker F \neq 0$, то и $\ker F^\times F \supset \ker F \neq 0$. \square

ТЕОРЕМА 12.5

Каждое линейное отображение $F : U \rightarrow W$ между евклидовыми пространствами U, W единственным образом раскладывается в композицию $F = G_F \circ S_F \circ P_F$ ортогональной проекции

¹См. предл. 12.2 на стр. 147.

$P_F : U \rightarrow V$ на ортогональное дополнение $V \stackrel{\text{def}}{=} \ker^\perp F$ к ядру $\ker F \subset U$, невырожденного самосопряжённого оператора $S_F : V \rightarrow V$ с положительными собственными значениями $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, где $r = \text{rk } F = \dim \text{im } F$, и изометрического вложения $G_F : V \hookrightarrow W$. При этом набор $\alpha_1^2, \dots, \alpha_r^2$ квадратов собственных чисел оператора S_F является набором всех (с учётом кратностей) ненулевых собственных чисел оператора $F^\times F : U \rightarrow U$.

Доказательство. Согласно теор. 12.3 на стр. 148 в евклидовом пространстве U имеется ортонормальный базис, состоящий из собственных векторов u_1, \dots, u_n самосопряжённого линейного оператора $F^\times F : U \rightarrow U$, причём все собственные значения этого оператора неотрицательны по лем. 12.4, т. е. $F^\times F u_i = \alpha_i^2 u_i$ для некоторых вещественных $\alpha_i \geq 0$. Перенумеруем базис так, чтобы $\alpha_i \neq 0$ при $1 \leq i \leq r$ и $\alpha_i = 0$ при $i > r$. Тогда, как мы видели в доказательстве лем. 12.4, все векторы u_i с $i > r$ лежат в ядре отображения F . Напротив, при $1 \leq i, j \leq r$ равенства

$$(F u_i, F u_j) = (F^\times F u_i, u_j) = \alpha_i^2 (u_i, u_j) = \begin{cases} \alpha_i^2 > 0 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

показывают, что векторы $w_i = F u_i / \alpha_i$ образуют в пространстве W ортонормальную систему. В частности, они линейно независимы. Так как $F(u_j) = 0$ при $j > r$, для любого $u = \sum x_i u_i \in U$ выполняется равенство $F(u) = \alpha_1 x_1 w_1 + \dots + \alpha_r x_r w_r$, т. е. векторы w_i с $1 \leq i \leq r$ составляют ортонормальный базис в $\text{im } F$, а векторы u_i с $1 \leq i \leq r$ — ортонормальный базис в ортогональном дополнении V к ядру $\ker F$. Оператор F является композицией изометрического изоморфизма $G_F : V \rightarrow \text{im } F$, $u_i \mapsto w_i$, диагонального оператора $S_F : V \rightarrow V$, $u_i \mapsto \alpha_i u_i$, и ортогональной проекции $P_F : U \rightarrow V$ вдоль $\ker F$.

Если имеется какое-либо ещё разложение $F = G S P_F$, где $P_F : U \rightarrow V$ — ортогональная проекция вдоль $\ker F$, то из предыдущего рассуждения вытекает, что пространство $V = (\ker F)^\perp$ является прямой ортогональной суммой всех собственных подпространств V_i оператора $F^\times F$, отвечающих ненулевым собственным значениям α_i^2 этого оператора, а композиция $G S : V \rightarrow \text{im } F$ совпадает с ограничением $F|_V$. Поскольку $S^\times = S$ как операторы $V \rightarrow V$, а $G^\times = G^{-1}$ как изометрические операторы $\text{im } F \rightarrow V$, мы заключаем, что $F^\times F|_V = S^2$. Так как оператор S^2 диагонализуется в том же самом базисе, что и S , мы заключаем, что самосопряжённый оператор S действует на каждом подпространстве V_i умножением на α_i и, тем самым, определяется по F однозначно. А тогда и $G = S^{-1} \circ F|_V : V \rightarrow W$ определяется однозначно. \square

Упражнение 12.5. Убедитесь, что оператор $F^\times : W \rightarrow V$ действует на построенные в доказательстве теор. 12.5 векторы $w_1, \dots, w_r \in W$ по правилу $w_i \mapsto \alpha_i u_i$ и аннулирует ортогональное дополнение к их линейной оболочке. Выведите отсюда, что множества всех (с учётом кратностей) ненулевых собственных чисел у операторов $F^\times F$ и $F F^\times$ одинаковы.

Определение 12.1 (Сингулярные числа и сингулярные направления)

В условиях теор. 12.5 набор из $\dim U$ неотрицательных квадратных корней α_i из собственных значений самосопряжённого оператора $F^\times F : U \rightarrow U$ называется набором сингулярных чисел линейного отображения $F : U \rightarrow W$ между евклидовыми пространствами U, W . Ровно $\text{rk } F$ из них строго положительны. Одномерные инвариантные подпространства¹ оператора $F^\times F$ называются сингулярными направлениями отображения F .

¹Т. е. одномерные подпространства, порождённые ненулевыми собственными векторами.

ПРИМЕР 12.6 (ЭТИМОЛОГИЯ ЭПИТЕТА «СИНГУЛЯРНЫЙ»)

Свяжем с отображением $F : U \rightarrow W$ функцию $\varphi : U \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto (Fu, Fu)/(u, u)$. Покажем, что её производная зануляется ровно на собственных направлениях оператора $F^\times F$.

УПРАЖНЕНИЕ 12.6. Покажите, что $(u, u)'(v) = 2(u, v)$ и $(Fu, Fu)'(v) = 2(Fu, Fv) = 2(F^\times Fu, v)$.

Согласно правилу дифференцирования дробей, условие $\varphi'(u) = 0$ равносильно тому, что для любого $v \in V$ выполняется равенство $2(F^\times Fu, v)(u, u) - 2(Fu, Fu)(u, v) = 0$, означающее, что $F^\times Fu = u \cdot (Fu, Fu)/(u, u)$, т. е. что вектор u является собственным для оператора $F^\times F$ с собственным значением $(Fu, Fu)/(u, u) = (F^\times Fu, u)/(u, u)$.

СЛЕДСТВИЕ 12.3 (ПОЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ)

Каждое биективное линейное преобразование $F \in \text{GL}(V)$ евклидова пространства V допускает единственное разложение $F = G_F S_F$, в котором оператор $G_F \in \text{O}(V)$ ортогонален, а $S_F \in \text{GL}(V)$ самосопряжён и имеет положительные собственные значения. Квадраты этих собственных значений являются собственными числами оператора $F^\times F$.

Доказательство. Поскольку оператор F биективен, правый член его канонического разложения $F = G_F \circ S_F \circ P_F$ из теор. 12.5 является тождественным отображением, а самосопряжённый оператор S_F не имеет ядра. Следовательно все собственные числа оператора S_F строго положительны. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 12.2. (ЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ G_F И S_F) Компоненты $G_F \in \text{O}(V)$ и S_F полярного разложения $F = G_F \circ S_F$ однозначно находятся из условий $G_F^\times G = \text{Id}_V$ и $S_F^\times = S_F$. А именно,

$$F^\times F = S_F^\times G_F^\times G_F S_F = S_F^2,$$

откуда $S_F = \sqrt{F^\times F}$ и $G_F = F S_F^{-1}$. Отметим, что так как нуль не является собственным числом оператора $F^\times F$, аналитическая вне нуля функция \sqrt{t} алгебраически вычислима на операторе $F^\times F$ при помощи стандартной интерполяционной процедуры из п° 10.4.1 на стр. 125.

УПРАЖНЕНИЕ 12.7. Покажите, что каждый невырожденный линейный оператор $F \in \text{GL}(V)$ на евклидовом пространстве V также допускает единственное разложение $F = SR$, в котором $R \in \text{O}(V)$, а S самосопряжён и имеет положительные собственные значения, квадраты которых равны собственным числам оператора $F F^\times$.

ПРИМЕР 12.7

Найдём полярное разложение $F = GS$ для оператора $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ с матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 22/15 & -4/3 & 4/15 \\ 4/15 & 2/3 & 28/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

в стандартном базисе. Поскольку $\det F = -4$, оператор F невырожден. Самосопряжённый оператор $F^\times F$ имеет матрицу

$$C = F^t F = \begin{pmatrix} 22/15 & 4/15 & 2/3 \\ -4/3 & 2/3 & 2/3 \\ 4/15 & 28/15 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22/15 & -4/3 & 4/15 \\ 4/15 & 2/3 & 28/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & -4/3 & 2/3 \\ -4/3 & 8/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 11/3 \end{pmatrix}$$

у которой след $\text{tr}(C) = 9$, сумма главных 2×2 -миноров

$$\det \begin{pmatrix} 8/3 & -4/3 \\ -4/3 & 8/3 \end{pmatrix} = 16/3, \quad \det \begin{pmatrix} 8/3 & 2/3 \\ 2/3 & 11/3 \end{pmatrix} = 28/3, \quad \det \begin{pmatrix} 8/3 & 2/3 \\ 2/3 & 11/3 \end{pmatrix} = 28/3$$

равна 24, определитель $\det(C) = \det^2 F = 16$ и характеристический многочлен

$$\det(tE - C) = t^3 - 9t^2 + 24t - 16 = (t-1)(t-4)^2.$$

Так как оператор $F^\times F$ диагонализуем, он аннулируется многочленом¹ $(t-1)(t-4)$. Следовательно, матрица $H = \sqrt{C}$ самосопряжённого сомножителя h полярного разложения $F = gh$ имеет вид² $aE + bC$, где интерполяционный многочлен $p(t) = a + bt$ для вычисления функции \sqrt{t} на матрице C однозначно определяется тем, что $p(1) = \sqrt{1} = 1$ и $p(4) = \sqrt{4} = 2$, т. е. $a + b = 1$ и $a + 4b = 2$, откуда $a = 2/3$, $b = 1/3$. Таким образом, полярное разложение имеет вид $F = GH$, где самосопряжённая матрица $H = \sqrt{C}$ равна

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8/9 & -4/9 & 2/9 \\ -4/9 & 8/9 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & 11/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/9 & -4/9 & 2/9 \\ -4/9 & 14/9 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & 17/9 \end{pmatrix}$$

а ортогональная матрица $G = FH^{-1}$ равна

$$\begin{pmatrix} 22/15 & -4/3 & 4/15 \\ 4/15 & 2/3 & 28/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13/18 & 2/9 & -1/9 \\ 2/9 & 13/18 & -1/9 \\ -1/9 & -1/9 & 5/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/15 & -2/3 & 2/15 \\ 2/15 & 1/3 & 14/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

УПРАЖНЕНИЕ 12.8. Убедитесь, что $G^t G = E$.

Следствие 12.4 (SVD-разложение³)

Каждая вещественная прямоугольная матрица $F \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ раскладывается в произведение $F = T_m D T_n$, в котором матрицы $T_m \in O_m$ и $T_n \in O_n$ ортогональны, а $m \times n$ -матрица $D = (d_{ij})$ диагональна и неотрицательна в том смысле, что $d_{ij} = 0$ при $i \neq j$, а все $d_{ii} \geq 0$. При этом ровно r F диагональных элементов матрицы D отлично от нуля, и они с точностью до перестановки диагональных элементов не зависят от выбора указанного разложения.

Доказательство. Будем воспринимать $F = F_{mn}$ как записанную в стандартных базисах \mathbf{n} и \mathbf{m} пространств $U = \mathbb{R}^n$ и $W = \mathbb{R}^m$ матрицу линейного оператора $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Обозначим через $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ортонормальный базис пространства U , построенный в доказательстве теор. 12.5, а через $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ — любой ортонормальный базис пространства W , содержащий ортонормальный набор векторов $w_i = F(u_i)/\alpha_i$, $1 \leq i \leq r$, из доказательства теор. 12.5. Оператор $F: u_i \mapsto \alpha_i w_i$ задаётся в базисах \mathbf{u} и \mathbf{w} диагональной матрицей $D = F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$, ненулевые диагональные элементы которой суть сингулярные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ оператора F . Поэтому $F = F_{mn} = C_{\mathbf{m}\mathbf{w}} F_{\mathbf{w}\mathbf{u}} C_{\mathbf{u}\mathbf{n}}$, где $C_{\mathbf{m}\mathbf{w}}$ — ортогональная матрица перехода от базиса \mathbf{w} к стандартному базису \mathbf{m} в \mathbb{R}^m , а $C_{\mathbf{u}\mathbf{n}} = C_{\mathbf{n}\mathbf{u}}^{-1} = C_{\mathbf{n}\mathbf{u}}^t$ — ортогональная матрица перехода от стандартного базиса \mathbf{n} в \mathbb{R}^n к базису \mathbf{u} . Для любого другого разложения $F = T_m A T_n$ с ортогональными T_n, T_m и

¹См. предл. 10.4 на стр. 121.

²См. п. 10.4.1 на стр. 125.

³«SVD» является аббревиатурой от английского *singular values decomposition*.

диагональной матрицей A имеем $F^t F = T_n^{-1} A^t A T_n$. Поскольку подобные матрицы имеют одинаковые с точностью до перестановки собственные числа, стоящие на диагонали диагональной матрицы $A^t A$ квадраты диагональных элементов матрицы A суть собственные числа матрицы $F^t F$. \square

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 12.1. Ортогональный оператор F переводит базисный вектор e в вектор $Fe = \lambda e$, $\lambda \in \mathbb{R}$, и

$$(e, e) = (Fe, Fe) = \lambda^2 = (e, e),$$

откуда $\lambda = \pm 1$.

Упр. 12.2. Так как $(a + b, a - b) = (a, a) - (b, b) = 0$, вектор $(a + b)/2 \in (a - b)^\perp$. Поскольку

$$a = \frac{a + b}{2} + \frac{a - b}{2} \quad \text{и} \quad b = \frac{a + b}{2} - \frac{a - b}{2}, \quad (12-6)$$

для любого вектора $w \in (a - b)^\perp$ выполняются равенства $(w, a) = (w, (a + b)/2) = (w, b)$. Поэтому векторы a и b ортогонально проектируются на гиперплоскость $(a - b)^\perp$ в один и тот же вектор $(a + b)/2$, а равенства (12-6) дают ортогональные разложения векторов a и b в сумме $V = (a - b)^\perp \oplus \mathbb{R} \cdot (a - b)$.

Упр. 12.3. Рассматриваемый поворот плоскости U является композицией отражений относительно прямых $u_1^\perp \cap U$ и $u_2^\perp \cap U$.

Упр. 12.4. Если $Fu = \lambda u$ для ненулевого вектора u , то из равенства $(Fu, u) = -(u, Fu)$ вытекает равенство $2\lambda \cdot (u, u) = 0$, возможное только при $\lambda = 0$.

Упр. 12.6. $(u + v, u + v) = (u, u) + 2(u, v) + o(|u|)$, $(F(u + v), F(u + v)) = (Fu, Fu) + 2(Fu, Fv) + o(|u|)$.

Упр. 12.7. Так как оператор FF^\times самосопряжён и биективен, все его собственные числа строго положительны. Поэтому имеется единственный самосопряжённый оператор S с положительными собственными значениями, квадрат которого равен¹ FF^\times . Тогда $F = SR$, где $R = S^{-1}F$ ортогонален, поскольку $R^\times R = R^\times S^{-2}F = F^\times (FF^\times)^{-1}F = \text{Id}_V$.

¹Так как S и S^2 диагонализуются в одном базисе, оператор S обязан действовать на каждом собственном подпространстве V_λ оператора S^2 умножением на положительный $\sqrt{\lambda}$.