§11. Евклидова геометрия

Всюду в этом параграфе речь идёт про конечномерные евклидовы векторные пространства на полем $\mathbb{R}$, см. §3 на стр. 33. Евклидово скалярное произведение[1] векторов u и w обозначается через (u, w) или через $u \cdot w$. Напомню, что оно билинейно, симметрично и положительно.

11.1. Ортонормальные базисы. Набор векторов $v_1, \dots, v_k$ в евклидовом пространстве называется *ортогональным*, если все векторы в нём попарно перпендикулярны, т. е. $(v_i, v_j) = 0$ при $i \neq j$. Ортогональный набор ненулевых векторов автоматически линейно независим, так как скалярно умножая на вектор v_i равенство

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = 0\,,$$

получаем $\lambda_i (v_i, v_i) = 0$, откуда все $\lambda_i = 0$.

Ортогональный набор векторов $e_1, \dots, e_k$ называется *ортонормальным*, если все его векторы имеют длину 1, т. е. $(e_i, e_i) = 1$ при всех i. Такой набор автоматически образует базис в своей линейной оболочке, и разложение $v = \sum x_i e_i$ произвольного вектора $v \in \operatorname{span}(e_1, \dots, e_k)$ по этому базису имеет коэффициенты $x_i = (e_i, v)$, а скалярное произведение векторов $u = \sum x_i e_i$ и $w = \sum y_i e_i$ равно $(u, w) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_k y_k$.

Упражнение 11.1. Проверьте оба эти факта.

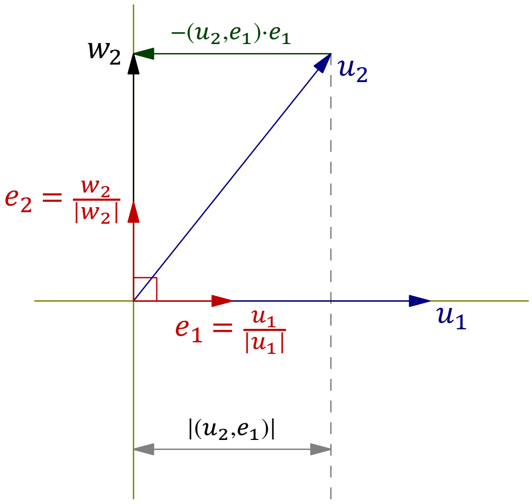

Рис. 11◇1. Второй шаг ортогонализации.

Предложение 11.1

Пусть не все векторы $u_1, \dots, u_m$ ненулевые. Тогда в их линейной оболочке существует такой ортонормальный базис $e_1, \dots, e_n$, что при каждом k линейная оболочка векторов $u_1, \dots, u_k$ лежит в линейной оболочке векторов $e_1, \dots, e_k$.

Доказательство. Выбрасывая из набора нулевые векторы, будем считать, что все $u_i \neq 0$. В качестве первого вектора искомого базиса возьмём $e_1 = u_1 / |u_1|$. По построению $|e_1| = 1$ и u_1 лежит в одномерном пространстве, натянутом на e_1. Допустим по индукции, что для векторов $u_1, \dots, u_k$ уже построены такие ортонормальные векторы $e_1, \dots, e_i$, что $i \leqslant k$ и

$$\operatorname{span}(e_1, \dots, e_i) = \operatorname{span}(u_1, \dots, u_k)\,. \tag{11-1}$$

Положим $w_{i+1} = u_{k+1} - \sum_{\nu=1}^{i} (u_{k+1}, e_\nu) \cdot e_\nu$, см. рис. 11◇1. Для каждого из уже построенных векторов e_j выполняется равенство $(w_{i+1}, e_j) = (u_{k+1}, e_j) - (u_{k+1}, e_j)(e_j, e_j) = 0$, т. е. вектор w_{i+1} ортогонален подпространству (11-1). Если $w_{i+1} = 0$, то вектор u_{k+1} лежит в подпространстве (11-1) и индуктивное предположение выполнятся для наборов $u_1, \dots, u_{k+1}$ и $e_1, \dots, e_i$. Если $w_{i+1} \neq 0$, полагаем $e_{i+1} = w_{i+1} / |w_{i+1}|$ и заключаем, что индуктивное предположение выполнятся для наборов $u_1, \dots, u_{k+1}$ и $e_1, \dots, e_{i+1}$. □

[1] См. опр. 3.1 на стр. 33.

Следствие 11.1
В каждом конечномерном евклидовом пространстве имеется ортонормальный базис. □

Определение 11.1
Описанный в доказательстве предл. 11.1 способ построения ортонормального базиса в линейной оболочке заданных векторов называется *ортогонализацией Грама – Шмидта*.

Пример 11.1 (уравнение гиперплоскости)
Линейное неоднородное уравнение $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = d$ на координаты $x_1, \dots, x_n$ относительно ортонормального базиса n-мерного евклидова пространства V можно переписать как уравнение на неизвестный вектор $x \in V$

$$(a, x) = d\,, \tag{11-2}$$

в котором вектор $a \in V$ и число $d \in \mathbb{R}$ заданы. На геометрическом языке это уравнение гласит, что ортогональная проекция вектора x на вектор[1] a равна

$$x_a = a \cdot \frac{(a,x)}{(a,a)} = a \cdot \frac{d}{|a|^2} = \frac{d}{|a|} \cdot \frac{a}{|a|}\,.$$

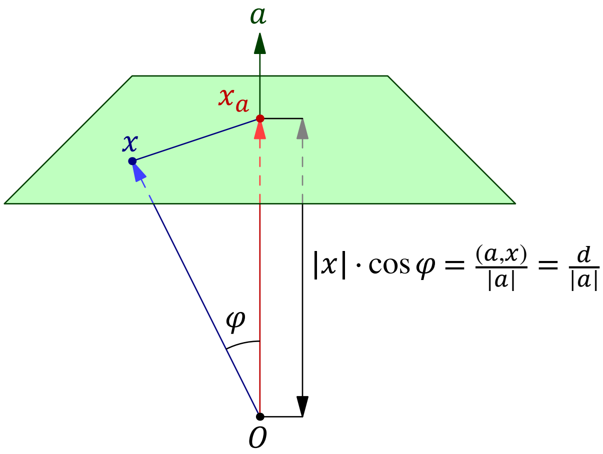

Рис. 11⋄2. ГМТ $x\ :\ (a, x) = d$.

Концы векторов x с таким свойством заметают в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ гиперплоскость, перпендикулярную вектору a и удалённую от нуля на расстояние $|d|/|a|$ вдоль вектора a, если $d > 0$, и в противоположную сторону, если $d < 0$ (см. рис. 11⋄2).

Пример 11.2 (срединный перпендикуляр)
Покажем, что в евклидовом аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$ ГМТ x, равноудалённых от двух заданных точек $p_0 \neq p_1$, представляет собою гиперплоскость, перпендикулярную вектору $\overrightarrow{p_0p_1}$ и проходящую через середину $(p_0 + p_1)/2$ отрезка $[p_0, p_1]$. Эта гиперплоскость называется *срединным перпендикуляром* к отрезку $[p_0, p_1]$. Равенство длин $|x, p_0| = |x, p_1|$ равносильно равенству скалярных произведений $(\overrightarrow{xp}_0, \overrightarrow{xp}_0) = (\overrightarrow{xp}_1, \overrightarrow{xp}_1)$, т. е. равенству

$$(p_0 - x, p_0 - x) = (p_1 - x, p_1 - x)\,,$$

где буквы p_0, p_1, x обозначают радиус-векторы соответствующих точек, выпущенные из произвольно выбранной начальной точки $O \in \mathbb{A}^n$. После раскрытия скобок и сокращений, получаем $(p_0, p_0) - 2\,(p_0, x) = (p_1, p_1) - 2\,(p_1, x)$ или, что то же самое,

$$2\,(p_1 - p_0, x) = (p_1, p_1) - (p_0, p_0)\,. \tag{11-3}$$

Это уравнение задаёт гиперплоскость, перпендикулярную вектору $\overrightarrow{p_0p_1} = p_1 - p_0$ и проходящую через точку $(p_0 + p_1)/2$, ибо последняя, очевидно, равноудалена от p_0 и p_1.

Упражнение 11.2. Убедитесь прямым вычислением, что $x = (p_0 + p_1)/2$ удовлетворяет уравнению (11-3).

[1] См. предл. 3.1 и опр. 3.2 на стр. 34.

11.2. Матрицы Грама. С любыми двумя наборами векторов евклидова пространства V

$$\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_m) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_k) \tag{11-4}$$

можно связать таблицу их попарных скалярных произведений — матрицу

$$G_{\boldsymbol{uw}} \stackrel{\text{def}}{=} \big((u_i, w_j)\big) \in \mathrm{Mat}_{m\times k}(\mathbb{R}), \tag{11-5}$$

в i-й строке и j-м столбце которой находится скалярное произведение (u_i, w_j). Матрица (11-5) называется *матрицей Грама* наборов векторов (11-4). Если воспринимать эти наборы векторов как матрицы с элементами из V, а под произведением векторов $a, b \in V$ понимать их скалярное произведение $ab \stackrel{\text{def}}{=} (a, b) \in \mathbb{R}$, то матрица Грама будет описываться равенством

$$G_{\boldsymbol{uw}} = \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{w},$$

где $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_k)$ это строка из векторов, а $\boldsymbol{u}^t$ — столбец, транспонированный к строке $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_m)$. Если наборы векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{w}$ линейно выражаются через какие-то другие наборы векторов $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_r)$ и $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_s)$ по формулам $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e} \cdot C_{\boldsymbol{eu}}$ и $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f} \cdot C_{\boldsymbol{fw}}$, где $C_{\boldsymbol{eu}} \in \mathrm{Mat}_{r\times m}(\mathbb{R})$ и $C_{\boldsymbol{fw}} \in \mathrm{Mat}_{s\times k}(\mathbb{R})$ некие матрицы, то матрица Грама $G_{\boldsymbol{uw}}$ пересчитывается через матрицу Грама $G_{\boldsymbol{ef}}$ по формуле

$$G_{\boldsymbol{uw}} = \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{w} = \big(\boldsymbol{e} C_{\boldsymbol{eu}}\big)^t \boldsymbol{f}\, C_{\boldsymbol{fw}} = C_{\boldsymbol{eu}}^t \boldsymbol{e}^t \boldsymbol{f}\, C_{\boldsymbol{fw}} = C_{\boldsymbol{eu}}^t G_{\boldsymbol{ef}} C_{\boldsymbol{fw}}. \tag{11-6}$$

При $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$ мы получаем таблицу умножения векторов из одного набора $u_1, \dots, u_m$. В этом случае обозначение $G_{\boldsymbol{uu}}$ сокращается до $G_{\boldsymbol{u}} \stackrel{\text{def}}{=} \big((u_i, u_j)\big) \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathbb{R})$, а правило преобразования (11-7) приобретает вид

$$G_{\boldsymbol{u}} = C_{\boldsymbol{eu}}^t G_{\boldsymbol{e}} C_{\boldsymbol{eu}}. \tag{11-7}$$

Определитель $\varGamma_{\boldsymbol{u}} \stackrel{\text{def}}{=} \det G_{\boldsymbol{u}}$ называется *определителем Грама* набора векторов $\boldsymbol{u}$. Ортонормальность набора векторов $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_k)$ означает, что его матрица Грама $G_{\boldsymbol{e}} = E$, и в этом случае определитель Грама $\varGamma_{\boldsymbol{e}} = \det E = 1$.

Предложение 11.2
Для любого набора векторов $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_m)$ выполняется неравенство $\varGamma_{\boldsymbol{u}} \geqslant 0$, которое обращается в равенство если и только если этот набор линейно зависим. Если набор $\boldsymbol{u}$ линейно независим, а набор векторов $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_m)$ составляет ортонормальный базис в линейной оболочке $\mathrm{span}(u_1, \dots, u_m)$, то $\varGamma_{\boldsymbol{u}} = \det^2 C_{\boldsymbol{eu}}$, где матрица $C_{\boldsymbol{eu}}$ составлена из столбцов координат векторов u_j в ортонормальном базисе $\boldsymbol{e}$.

Доказательство. Если $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m = 0$ для некоторого ненулевого набора констант λ_i, то скалярно умножая это равенство на вектор u_ν, мы получаем при каждом ν равенство

$$\lambda_1(u_\nu, u_1) + \lambda_2(u_\nu, u_2) + \dots + \lambda_m(u_\nu, u_m) = 0,$$

означающее, что столбцы матрицы Грама $G_{\boldsymbol{u}} = \big((u_i, u_j)\big)$ линейно зависимы с коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, откуда $\varGamma_{\boldsymbol{u}} = \det G_{\boldsymbol{u}} = 0$. Если же векторы $u_1, \dots, u_m$ линейно независимы, то их линейная оболочка m-мерна, и по предл. 11.1 на стр. 131 в ней имеется ортонормальный базис $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_m)$. Тогда $G_{\boldsymbol{u}} = C_{\boldsymbol{eu}}^t C_{\boldsymbol{e}} C_{\boldsymbol{eu}} = C_{\boldsymbol{eu}}^t C_{\boldsymbol{eu}}$ согласно формуле (11-7), и $\varGamma_{\boldsymbol{u}} = \det^2 C_{\boldsymbol{eu}} > 0$, т. к. матрица перехода $C_{\boldsymbol{eu}}$ обратима[1] и её определитель ненулевой[2]. □

[1] См. предл. 5.2 на стр. 64.
[2] См. сл. 8.4 на стр. 99.

11.2.1. Евклидов объём и ориентация. Зафиксируем в евклидовом пространстве V какой-нибудь ортонормальный базис $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и рассмотрим форму объёма $\omega_{\boldsymbol{e}}$, принимающую на этом базисе значение 1. Тогда квадрат объёма любого другого базиса $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}C_{\boldsymbol{eu}}$ по предл. 11.2 равен определителю Грама этого базиса:

$$\omega_{\boldsymbol{e}}^2(\boldsymbol{u}) = \det{}^2 C_{\boldsymbol{eu}} = \Gamma_{\boldsymbol{u}} \,. \tag{11-8}$$

В частности, квадрат объёма любого ортонормального базиса $\boldsymbol{u}$ равен 1. Мы заключаем, что матрица перехода $C_{\boldsymbol{eu}}$ между любыми двумя ортонормальными базисами $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{u}$ евклидова пространства V имеет определитель $\det C_{\boldsymbol{eu}} = \pm 1$. Ортонормальные базисы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{u}$ называются *одинаково ориентированными*, если $\det C_{\boldsymbol{eu}} = +1$, и *противоположно ориентированными*, если $\det C_{\boldsymbol{eu}} = -1$. Обратите внимание, что любая нечётная перестановка базисных векторов меняет ориентацию базиса, а любая чётная — не меняет.

Из сказанного вытекает, что все ортонормальные базисы евклидова пространства V имеют одинаковый по абсолютной величине объём при любом выборе формы объёма на V, и что на пространстве V имеются ровно две формы объёма, принимающие на всех ортонормальных базисах значения ± 1. Эти две формы объёма отличаются друг от друга знаком, и выбор одной из них в качестве стандартной формы объёма на V называется *выбором ориентации* евклидова пространства V. Ориентация координатного пространства $\mathbb{R}^n$, принимающая на стандартном базисе значение $+1$, называется *стандартной*.

Абсолютная величина объёма параллелепипеда, натянутого на произвольно заданные векторы $v_1, \dots, v_n$, вычисленная относительно одной из двух ориентирующих форм, не зависит от выбора ориентации и называется *евклидовым объёмом* неориентированного параллелепипеда. Согласно формуле (11-8), квадрат евклидова объёма равен определителю Грама. Мы будем обозначать евклидов объём через

$$\operatorname{Vol}(v_1, \dots, v_n) = \sqrt{\Gamma_{(v_1, \dots, v_n)}} = \sqrt{\det\left(v_i, v_j\right)} \,. \tag{11-9}$$

11.3. Евклидова двойственность. С каждым вектором v евклидова пространства V связан линейный функционал $g_v : V \to \mathbb{R}$, $u \mapsto (u, v)$, скалярного умножения на этот вектор. Сопоставление вектору $v \in V$ линейного функционала g_v задаёт линейное отображение

$$G_V : V \to V^* \,, \quad v \mapsto g_v \,, \tag{11-10}$$

которое называется *евклидовой корреляцией*.

Упражнение 11.3. Убедитесь в линейности функционала g_v и отображения G_V.

Так как $G_V(v) = (v, v) \neq 0$ для любого $v \neq 0$, ковектор $g_v \neq 0$ при $v \neq 0$. Поэтому отображение (11-10) инъективно, а значит, является изоморфизмом векторных пространств. Таким образом, любой линейный функционал на евклидовом векторном пространстве однозначно представляется в виде скалярного произведения с некоторым вектором.

Упражнение 11.4. Убедитесь, что матрица отображения G_V в произвольном базисе $\boldsymbol{v}$ пространства V и двойственном ему базисе $\boldsymbol{v}^*$ пространства V^* совпадает с матрицей Грама $G_{\boldsymbol{v}}$ базиса $\boldsymbol{v}$.

11.3.1. Евклидово двойственный базис. Для любого базиса $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ в евклидовом пространстве V, прообразы $u_1^\times, \dots, u_n^\times \in V$ координатных функционалов $u_1^*, \dots, u_n^* \in V^*$ при изоморфизме (11-10) образуют в пространстве V базис, именуемый *евклидово двойственным* к базису $\boldsymbol{u}$ и обозначаемый $\boldsymbol{u}^\times = (u_1^\times, \dots, u_n^\times)$. По определению, векторы этого базиса однозначно характеризуются соотношениями

$$(u_i, u_j^\times) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ 1 & \text{при } i = j\,. \end{cases} \tag{11-11}$$

На матричном языке эти соотношения означают, что матрица Грамаформм. (11-5) на стр. 133 $G_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\times} = \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{u}^\times = E$. Согласно форм. (11-7) на стр. 133 матрица $C_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\times}$, линейно выражающая базис $\boldsymbol{u}^\times$ через базис $\boldsymbol{u}$ по формуле $\boldsymbol{u}^\times = \boldsymbol{u}C_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\times}$, удовлетворяет равенству $E = G_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\times} = G_{\boldsymbol{u}}C_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\times}$, т. е. обратна к матрице Грама базиса $\boldsymbol{u}$. Тем самым,

$$(u_1^\times, \dots, u_n^\times) = (u_1, \dots, u_n) \cdot G_{\boldsymbol{u}}^{-1}\,. \tag{11-12}$$

Ортонормальность базиса равносильна тому, что он совпадает со своим евклидово двойственным.

Упражнение 11.5. Убедитесь, что $u_i^{\times\times} = u_i$.

По определению двойственного базиса[1], каждый вектор $v \in V$ раскладывается по любому базису $u_1, \dots, u_n$ с коэффициентами, равными скалярным произведениям этого вектора с соответствующими векторами двойственного базиса:

$$v = \sum_i e_i \cdot (v, e_i^\times)\,, \tag{11-13}$$

в чём легко удостовериться и непосредственно, скалярно умножив обе части этого равенства на $u_i^\times$ для каждого i.

11.3.2. Ортогоналы. Прообраз аннулятора $\operatorname{Ann}(U) \subset V^*$ данного подпространства $U \subset V$ при изоморфизме (11-10) обозначается через

$$U^\perp = \{w \in V \mid \forall\, u \in U\ (u, w) = 0\}$$

и называется *ортогоналом* или *ортогональным дополнением* к U. По сл. 7.1 на стр. 87

$$\dim U^\perp = \dim \operatorname{Ann} U = \dim V - \dim U \tag{11-14}$$

Из сл. 7.2 на стр. 87 и теор. 7.1 на стр. 88 вытекает, что соответствие $U \leftrightarrow U^\perp$ задаёт оборачивающую включения биекцию между подпространствами дополнительных размерностей в V, и эта биекция переводит суммы подпространств в пересечения, а пересечения — в суммы, т. е. для любых подпространств $U, W \subset V$ выполняются равенства

$$U^{\perp\perp} = U\,, \quad (U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp\,, \quad (U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp\,. \tag{11-15}$$

[1] См. n° 7.1.1 на стр. 84.

11.4. Ортогональное проектирование, расстояния и углы. Поскольку $U \cap U^{\perp} = 0$, так как $(u, u) = 0$ только для $u = 0$, подпространства U и $U^{\perp}$ дополнительны друг другу в силу соотношения (11-14), т. е. $V = U \oplus U^{\perp}$ и каждый вектор $v \in V$ допускает единственное разложение

$$v = v_U + v_{U^{\perp}}\,, \quad \text{где} \quad v_U \in U\,,\; v_{U^{\perp}} \in U^{\perp}\,. \tag{11-16}$$

Компоненты $v_U \in U$ и $v_{U^{\perp}} \in U^{\perp}$ этого разложения называются, соответственно *ортогональной проекцией* вектора v на U и его *нормальной составляющей* относительно U. Сопоставление каждому вектору $v \in V$ ого ортогональной проекции на U задаёт линейное отображение

$$\pi_U : V = U \oplus U^{\perp} \twoheadrightarrow U\,, \quad v = v_U + v_{U^{\perp}} \mapsto v_U\,,$$

которое называется *ортогональным проектированием* V на U.

Предложение 11.3

Ортогональная проекция $v_U \in U$ произвольного вектора $v \in V$ на подпространство $U \subset V$ однозначно характеризуется любым из следующих эквивалентных друг другу свойств:

1) $v - v_U \in U^{\perp}$ 2) $\forall\, u \in U \quad (u, v) = (u, v_U)$ 3) $\forall\, u \in U \quad u \neq v_U \;\Rightarrow\; |v - u| > |v - v_U|$

и может найдена по формуле

$$v_U = \sum_i u_i \cdot (v, u_i^{\times})\,, \tag{11-17}$$

где $u_1, \dots, u_m$ и $u_1^{\times}, \dots, u_m^{\times}$ — произвольные евклидово двойственные базисы в U.

Доказательство. Свойства (1) и (2) очевидным образом равносильны и утверждают, что векторы v_U и $v - v_U$ являются компонентами вектора v в прямом разложении $V = U \oplus U^{\perp}$. Поскольку для любого вектора $u = v_U + w \in U$, где $w \in U$ отличен от нуля, выполняется строгое неравенство $(v - u, v - u) = (v_{U^{\perp}} - w, v_{U^{\perp}} - w) = (v_{U^{\perp}}, v_{U^{\perp}}) + (w, w) > (v_{U^{\perp}}, v_{U^{\perp}})$, ортогональная проекция v_U вектора v на подпространство U обладает свойством (3). А так как вектор, обладающий свойством (3), очевидным образом единствен, это свойство равносильно свойствам (1) и (2). Остаётся проверить, что вектор v_U, определённый по формуле (11-17), обладает свойством (2). Поскольку свойство (2) линейно по $u \in U$, достаточно убедиться, что оно выполняется для базисных векторов $u = u_1^{\times}, \dots, u_m^{\times}$, что очевидно: $(v_U, u_\nu^{\times}) = \sum_i (u_i, u_\nu^{\times}) \cdot (v, u_i^{\times}) = (v, u_\nu^{\times})$ для каждого ν. □

Следствие 11.2

В евклидовом аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ для любого непустого аффинного подпространства $\Pi \subsetneq \mathbb{A}(V)$ и любой точки $a \notin \Pi$ существует единственная точка $a_\Pi \in \Pi$, удовлетворяющая двум эквивалентным друг другу условиям:

1) вектор $\overrightarrow{aa_\Pi}$ перпендикулярен любому вектору $\overrightarrow{pq}$ с $p, q \in \Pi$

2) $|aq| > |aa_\Pi|$ для любой точки $q \in \Pi$, отличной от a_Π.

Доказательство. Поместим начало отсчёта в какую-нибудь точку $o \in \Pi$ и отождествим точки $a \in \mathbb{A}(V)$ с радиус-векторами $\overrightarrow{oa} \in V$. При этом аффинное подпространство Π превратится в векторное подпространство $U \subset V$, а точке $a \in A$ сопоставится её радиус вектор $v = \overrightarrow{oa} \in V$. Остаётся применить к ним предл. 11.3. □

11.4.1. Расстояние до подпространства. Точка $a_\Pi \in \Pi$ из сл. 11.2 называется *ортогональной проекцией* точки a на аффинное подпространство $\Pi \subset \mathbb{A}(V)$. Длина $|a - a_\Pi|$ называется *расстоянием* от точки a до подпространства Π. По свойству (1) из предл. 11.3 это расстояние равно длине $\left|\overrightarrow{qp}_{U^\perp}\right|$ ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{qp}$, где $q \in \Pi$ — любая точка, на ортогональное дополнение $U^\perp$ к направляющему векторному пространству $U \subset V$ аффинного подпространства Π.

Пример 11.3 (расстояние от точки до гиперплоскости)
Направляющим векторным пространством гиперплоскости Π с уравнением[1] $(a, x) = d$ является ортогонал $a^\perp$ к вектору a. Расстояние от произвольно заданной точки p до гиперплоскости Π равно расстоянию между их ортогональными проекциями на одномерное подпространство, порождённое вектором a. Точка p проектируется в вектор $a \cdot (a, p)/(a, a)$, гиперплоскость Π — в вектор $a \cdot (x, p)/(a, a) = a \cdot d/(a, a)$. Разность между ими имеет длину

$$|(a, p) - d| \cdot |a|/(a, a) = |(a, p) - d|/|a|\,.$$

Пример 11.4 (евклидов объём через площадь основания и высоту)
Рассмотрим в евклидовом пространстве линейно независимый набор $\boldsymbol{w} = (v, u_1, \dots, u_n)$ из $n+1$ векторов и обозначим через U линейную оболочку его поднабора $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$, состоящего из последних n векторов. Вектор v единственным образом представляется в виде суммы $v = v_U + v_{U^\perp}$, где $v_U \in U$, а вектор $v_{U^\perp}$ лежит в одномерном ортогональном дополнении $U^\perp$ к подпространству U в линейной оболочке W набора векторов $\boldsymbol{w}$. Вектор $v_{U^\perp}$ называется *высотой* параллелепипеда $(v, u_1, \dots, u_n)$, опущенной из вершины v на основание $\boldsymbol{u}$. Длина этой высоты равна расстоянию от вершины v до подпространства U или, что то же самое, длине ортогональной проекции $v_{U^\perp}$ вектора v на $U^\perp$. Так как вектор v_U является линейной комбинацией векторов u_i, в координатах относительно любого ортонормального базиса в W ориентированный объём натянутого на векторы $\boldsymbol{w}$ параллелепипеда равен

$$\det(v, u_1, \dots, u_n) = \det(v - v_U, u_1, \dots, u_n) = \det(v_{U^\perp}, u_1, \dots, u_n) = \sqrt{\Gamma_{(v_{U^\perp}, u_1, \dots, u_n)}}\,.$$

Единственным ненулевым элементом первой строки и первого столбца определителя Грама векторов $v_{U^\perp}, u_1, \dots, u_n$ является стоящий в левом верхнем углу квадрат $|v_{U^\perp}|^2$. Поэтому

$$\mathrm{Vol}^2(v, u_1, \dots, u_n) = \Gamma_{(v_{U^\perp}, u_1, \dots, u_n)} = |v_{U^\perp}|^2 \cdot \Gamma_{(u_1, \dots, u_n)} = |v_{U^\perp}|^2 \cdot \mathrm{Vol}^2(u_1, \dots, u_n)\,.$$

Иначе говоря, $(n+1)$-мерный евклидов объём параллелепипеда $\boldsymbol{w}$ равен произведению n-мерного евклидова объёма основания $\boldsymbol{u}$ на длину опущенной на него высоты:

$$\mathrm{Vol}_{n+1}(v, u_1, \dots, u_n) = |v_{U^\perp}| \cdot \mathrm{Vol}_n(u_1, \dots, u_n)\,. \tag{11-18}$$

Пример 11.5 (расстояние между аффинными подпространствами)
Рассмотрим в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$, ассоциированном с евклидовым векторным пространством V, аффинные подпространства $K = p + U$ и $L = q + W$, с направляющими векторными пространствами $U, W \subset V$. Пусть эти пространства не пересекаются, то есть[2] $\overrightarrow{pq} \notin U + W$. Для любых двух векторов $x = p + u \in K$ и $y = q + w \in L$ расстояние $|y - x| = |\overrightarrow{pq} - (w - u)|$

[1] См. прим. 11.1 на стр. 132.
[2] См. предл. 4.3 на стр. 54.

достигает своего минимума по $u \in U$, $w \in W$ тогда и только тогда, когда вектор $w - u = \overrightarrow{pq}_{U+W}$ является ортогональной проекцией вектора $\overrightarrow{pq}$ на подпространство $U + W$ и этот минимум равен расстоянию между вектором $\overrightarrow{pq}$ и подпространством $U + W$, т. е. длине ортогональной проекции $\overrightarrow{pq}_{(U+W)^\perp}$ на подпространство $(U + W)^\perp$. Он называется *расстоянием* между аффинными подпространствами K, L и обозначается

$$|K, L| = \left|\overrightarrow{pq}_{(U+W)^\perp}\right| \tag{11-19}$$

Если $K \cap L \neq \varnothing$, т. е. $\overrightarrow{pq} \in U + W$, мы полагаем $|K, L| = 0$, что согласуется с равенством (11-19), так как в этом случае $\overrightarrow{pq}_{(U+W)^\perp} = 0$. Если векторы $v_1, \dots, v_k$ составляют базис подпространства $U + W$, то вектор $\overrightarrow{pq}_{(U+W)^\perp}$ является опущенной из вершины q высотой параллелепипеда, натянутого на векторы $\overrightarrow{pq}, v_1, \dots, v_k$, и длину этой высоты можно вычислять при помощи фомулы (11-18):

$$|K, L| = \frac{\mathrm{Vol}_{k+1}(\overrightarrow{pq}, v_1, \dots, v_k)}{\mathrm{Vol}_k(v_1, \dots, v_k)} = \sqrt{\frac{\Gamma_{(\overrightarrow{pq}, v_1, \dots, v_k)}}{\Gamma_{(v_1, \dots, v_k)}}}\,, \tag{11-20}$$

где Vol_m означает m-мерный евклидов объём.

11.4.2. Угол между вектором и подпространством. Рассмотрим в евклидовом векторном пространстве V векторное подпространство $U \subset V$ и вектор $v \in V$, не лежащий ни в U, ни в $U^\perp$. Тогда абсолютная величина ориентированного угла[1] $0 < |\measuredangle(v, u)| < \pi/2$ между этим вектором и ненулевыми векторами $u \in U$ достигает своего минимума на единственном с точностью до умножения на положительную константу векторе u, равном ортогональной проекции v_U вектора v на подпространство U. В самом деле, наименьшему значению угла отвечает наибольшее значение его косинуса

$$\cos(\measuredangle(v, u)) = \frac{(v, u)}{|v| \cdot |u|} = \frac{(v_U, u)}{|v| \cdot |u|} = (v_U/|v_U|, u/|u|) \cdot \frac{|v_U|}{|v|}$$

(второе равенство выполняется в силу свойства (2) из предл. 11.3 на стр. 136). Второй сомножитель не зависит от u, а первый в силу неравенства Коши – Буняковского – Шварца[2] не превосходит произведения длин $\left|v_U/|v_U|\right| \cdot \left|u/|u|\right| = 1$ и в точности равен этому произведению если и только если векторы v_U и u сонаправлены. Угол $\varphi \in [0, \pi/2]$, однозначно определяемый из равенства

$$\cos\varphi = |v_U|/|v|$$

называется *евклидовым углом* между ненулевым вектором v и подпространством U. При $v \in U$ и $v \in U^\perp$ эта формула даёт $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ соответственно, так как $v_U = v$ и $v_U = 0$ в этих случаях. Обратите внимание, что возникающие в этих двух крайних случаях углы по-прежнему являются минимальными среди углов между вектором v и ненулевыми векторами $u \in U$.

Так как $|v_{U^\perp}| = |v| \cdot \sin\varphi$, евклидов угол φ между вектором v и подпространством U также можно вычислять при помощи форм. (11-18) на стр. 137:

$$\sin\varphi = \frac{|v_{U^\perp}|}{|v|} = \frac{\sqrt{\Gamma_{(v, u_1, \dots, u_k)}}}{|v|\sqrt{\Gamma_{(u_1, \dots, u_k)}}}\,, \tag{11-21}$$

где $u_1, \dots, u_k$ — произвольный базис подпространства U.

[1] См. формулу (3-9) на стр. 38.

[2] См. формулу (3-4) на стр. 34.

11.5. Векторные произведения. Зафиксируем в n-мерном евклидовом векторном пространстве V какой-нибудь ортонормальный базис $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и условимся записывать векторы $v \in V$ строками их координат в этом базисе. Сопоставим каждому набору из $n-1$ векторов $v_1, \dots, v_{n-1} \in V$ матрицу A размера $(n-1) \times n$, по строкам которой записаны координаты этих векторов в базисе $\boldsymbol{e}$, и назовём *векторным произведением* векторов $v_1, \dots, v_{n-1}$ вектор

$$[v_1, \dots, v_{n-1}] \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} A_i e_i = (A_1, \dots, A_n)\,, \tag{11-22}$$

i-я координата A_i которого равна взятому со знаком $(-1)^{i-1}$ определителю дополнительной к i-тому столбцу $(n-1) \times (n-1)$-подматрицы в A, точно так же, как это было во втором правиле Крамера из n° 8.2.3 на стр. 103. Векторное произведение замечательно тем, что для любого вектора $u \in V$ выполняется равенство

$$\omega_{\boldsymbol{e}}(u, v_1, \dots, v_{n-1}) = (u, [v_1, \dots, v_{n-1}])\,, \tag{11-23}$$

где $\omega_{\boldsymbol{e}}$ — единственная форма ориентированного объёма на V, принимающая на ортонормальном базисе $\boldsymbol{e}$ значение 1.

Упражнение 11.6. Докажите соотношение (11-23).

Иначе говоря, вектор $[v_1, \dots, v_{n-1}]$ является прообразом линейного функционала

$$V \to \mathbb{R}\,, \quad u \mapsto \omega_{\boldsymbol{e}}(u, v_1, \dots, v_{n-1})\,,$$

при изоморфизме $V \xrightarrow{\sim} V^*$ из форм. (11-10) на стр. 134, сопоставляющем вектору $v \in V$ ковектор $g_v : V \to \mathbb{R}$, $u \mapsto (u, v)$. В частности, векторное произведение не меняется при замене ортонормального базиса $\boldsymbol{e}$ на любой другой ортонормальный базис той же ориентации[1] и меняет знак при выборе вместо $\boldsymbol{e}$ ортонормального базиса противоположной ориентации. Геометрически, векторное произведение однозначно определяется следующими своими свойствами.

Предложение 11.4

Вектор $[v_1, \dots, v_{n-1}]$ перпендикулярен векторам $v_1, \dots, v_{n-1}$, и его длина равна евклидову объёму $(n-1)$-мерного параллелепипеда, натянутого на векторы $v_1, \dots, v_{n-1}$. Если эта длина ненулевая, то направление вектора $[v_1, \dots, v_{n-1}]$ таково, что матрица перехода от базиса

$$[v_1, \dots, v_{n-1}], v_1, \dots, v_{n-1}$$

к базису $\boldsymbol{e}$ имеет положительный определитель.

Доказательство. Подставляя в формулу (11-23) вектор $u = v_i$, получаем

$$(v_i, [v_1, \dots, v_{n-1}]) = \omega_{\boldsymbol{e}}(v_i, v_1, \dots, v_{n-1}) = 0\,,$$

что доказывает первое утверждение. Подставляя $u = [v_1, \dots, v_{n-1}]$, получаем

$$\omega_{\boldsymbol{e}}([v_1, \dots, v_{n-1}], v_1, \dots, v_{n-1}) = \big|[v_1, \dots, v_{n-1}]\big|^2 \geqslant 0\,.$$

В силу первого утверждения вектор $[v_1, \dots, v_{n-1}]$ является высотой параллелепипеда, объём которого стоит в левой части последней формулы. Согласно прим. 11.4 этот объём равен произведению длины $\big|[v_1, \dots, v_{n-1}]\big|$ на евклидов объём $(n-1)$-мерного параллелепипеда, натянутого на векторы $v_1, \dots, v_{n-1}$. Отсюда вытекают второе и третье утверждения. □

[1] См. n° 11.2.1 на стр. 134.

Следствие 11.3
Векторы $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ линейно зависимы если и только если $[v_1, \dots, v_{n-1}] = 0$. □

Пример 11.6 (расстояние меду подпространствами, продолжение прим. 11.5)
Формулу из прим. 11.5 для минимального расстояния между непересекающимися аффинными подпространствами $p+U$ и $q+W$ в евклидовом аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ можно переписать как

$$\frac{\mathrm{Vol}_{k+1}(\overrightarrow{qp}, e_1, \dots, e_k)}{\mathrm{Vol}_k(e_1, \dots, e_k)} = \frac{\left|\det(\overrightarrow{qp}, e_1, \dots, e_k)\right|}{\left|[e_1, \dots, e_k]\right|},$$

где $e_1, \dots, e_k$ — любой базис пространства $U + W$, а определитель в правой части — это определитель матрицы координат указанных в нём векторов в каком-нибудь ортонормальном базисе пространства V.

Пример 11.7 (векторное произведение в $\mathbb{R}^3$)
Векторное произведение в $\mathbb{R}^3$, заданное с помощью стандартного ортонормального базиса $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)$, представляет собою бинарную операцию $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(u, w) \mapsto [u, w]$, и часто обозначается[1] $u \times w$. Формула (11-23) в этом случае утверждает, что ориентированный объём параллелепипеда, натянутого на векторы

$$(a, b, c) = (e_1, e_2, e_3) \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

равен скалярному произведению вектора $a = (a_1, a_2, a_3)$ с вектором

$$\begin{aligned}[] [b, c] &\overset{\text{def}}{=} (b_2c_3 - b_3c_2,\ -b_1c_3 + b_3c_1,\ b_1c_2 - b_2c_1) = \\ &= \left(\det\begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix},\ -\det\begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix},\ \det\begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}\right), \end{aligned} \tag{11-24}$$

в чём несложно убедиться, раскладывая по первому столбцу определитель

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \left(b_2c_3 - b_3c_2\right) + a_2 \cdot \left(-b_1c_3 + b_3c_1\right) + a_3 \cdot \left(b_1c_2 - b_2c_1\right) = (a, [b, c]).$$

Так как $(b, [b, c]) = \det(b, b, c) = 0$ и $(c, [b, c]) = \det(c, b, c) = 0$, вектор $[b, c]$ перпендикулярен векторам b и c, а квадрат его длины $\left([b, c], [b, c]\right) = \mathrm{Vol}_3\left([b, c], b, c\right) = \left|[b, c]\right| \cdot \mathrm{Vol}_2(b, c)$, откуда $\left|[b, c]\right| = \mathrm{Vol}_2(b, c)$.

Упражнение 11.7. Убедитесь, что векторное произведение $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ кососимметрично, т. е. $v \times v = 0$ для всех v, и не ассоциативно, но удовлетворяет *правилу Лебница*[2]

$$u \times (v \times w) = (u \times v) \times w + v \times (u \times w).$$

Упражнение 11.8. Докажите для векторных произведений в $\mathbb{R}^3$ равенства
а) $\left[a, [b, c]\right] = b \cdot (a, c) - c \cdot (a, b)$ б) $\left[[a, b], [a, c]\right] = a \cdot \det(a, b, c)$
в) $\left([a, b], [c, d]\right) = \det\begin{pmatrix} (a, c) & (a, d) \\ (b, c) & (b, d) \end{pmatrix}$

[1] В английской литературе векторное произведение даже и называется *cross-product*.
[2] Которое часто записывают в виде $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$ и называют *тождеством Якоби*.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. II.4. Значение линейной формы g_{v_j} на базисном векторе v_i равно (v_i, v_j), т. е. столбец координат этой формы в двойственном базисе $\boldsymbol{v}^*$ состоит из произведений (v_i, v_j).

Упр. II.6. Запишите все векторы строками их координат в базисе $\boldsymbol{e}$ и разложите

$$\det(u, v_1, \dots, v_{n-1}) = \omega(u, v_1, \dots, v_{n-1})$$

по первой строке u.