

§8. Определители

8.1. Объём n -мерного ориентированного параллелепипеда. Ненулевая функция от n аргументов $\omega : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$ на n -мерном векторном пространстве V называется *объёмом ориентированного n -мерного параллелепипеда* или *формой n -мерного объёма*, если она обладает теми же двумя свойствами, что и форма площади из п° 1.3 на стр. 11, а именно¹:

- 1) объём не меняется при добавлений к любому из аргументов произвольной кратности любого другого аргумента: $\omega(\dots, u + \lambda w, \dots, w, \dots) = \omega(\dots, u, \dots, w, \dots)$
- 2) при умножении любого из аргументов на число объём умножается на это число:

$$\omega(\dots, \lambda v, \dots) = \lambda \omega(\dots, v, \dots).$$

На геометрическом языке эти свойства, как и раньше, означают, что объём параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, \dots, v_n , как на рис. 8♦1, умножается на λ при умножении любого ребра на λ , и не меняется при сдвиге двух противоположных $(n - 1)$ -мерных граней друг относительно друга в направлении какого-нибудь параллельного этим граням ребра (параллельная проекция происходящего на двумерную плоскость, порождённую ребром, вдоль которого делается сдвиг, и ребром, соединяющим сдвигаемые грани, изображена на рис. 8♦2).

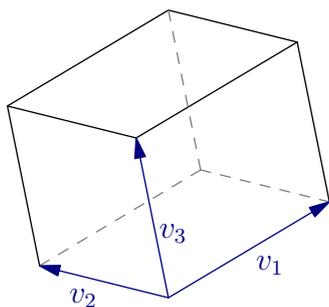


Рис. 8♦1. Параллелепипед.

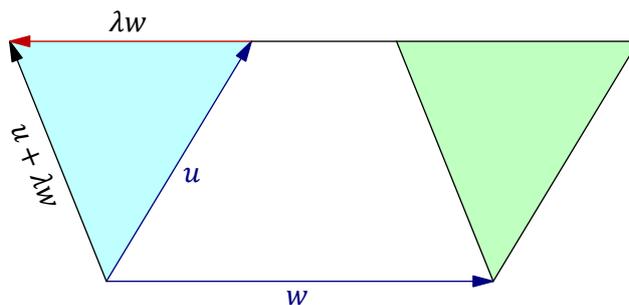


Рис. 8♦2. Параллельный перекоп.

Дословно так же, как лем. 1.3 на стр. 12, доказывается

Лемма 8.1

Каждая форма n -мерного объёма ω автоматически обладает следующими свойствами:

- 1) если векторы v_1, \dots, v_n линейно зависимы, то $\omega(v_1, \dots, v_n) = 0$, в частности, ω *кососимметрична*², т. е. $\omega(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0$
- 2) форма ω линейна по каждому из своих аргументов при фиксированных остальных, т. е.

$$\omega(\dots, \lambda u + \mu w, \dots) = \lambda \omega(\dots, u, \dots) + \mu \omega(\dots, w, \dots) \quad (8-1)$$

¹Здесь и далее мы обозначаем многоточиями аргументы, остающиеся неизменными в левой и правой части равенства.

²Функция от нескольких аргументов называется *кососимметричной*, если она обращается в нуль, когда какие-нибудь два аргумента совпадают.

3) форма ω знакопеременна¹, т. е. $\omega(\dots, u, \dots, w, \dots) = -\omega(\dots, w, \dots, u, \dots)$.

Доказательство. Если один из векторов линейно выражается через остальные, к примеру, $v_1 = \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$, то $\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(\lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n, v_2, \dots, v_n) = \omega(0, v_2, \dots, v_n) = \omega(0 \cdot 0, v_2, \dots, v_n) = 0 \cdot \omega(0, v_2, \dots, v_n) = 0$. Это доказывает свойство (1). Свойство (2) очевидно, когда оба набора аргументов в правой части равенства (8-1) линейно зависимы: в этом случае набор аргументов в левой части тоже линейно зависим, и обе части (8-1) нулевые по уже доказанному свойству (1). Поэтому без ограничения общности можно считать, что аргументы первого слагаемого в правой части (8-1) образуют базис пространства V . Тогда $w = \rho u + v$, где v является линейной комбинацией остальных $n - 1$ аргументов, и левая часть (8-1) равна

$$\omega(\dots, \lambda u + \mu \rho u + \mu v, \dots) = \omega(\dots, (\lambda + \mu \rho)u, \dots) = (\lambda + \mu \rho)\omega(\dots, u, \dots),$$

а второе слагаемое правой части переписывается как $\mu \omega(\dots, \rho u + v, \dots) = \mu \rho \cdot \omega(\dots, u, \dots)$, что доказывает свойство (2). Знакопеременность следует из линейности и кососимметричности:

$$\begin{aligned} \omega(\dots, u, \dots, w, \dots) + \omega(\dots, w, \dots, u, \dots) &= \\ &= \omega(\dots, u, \dots, u, \dots) + \omega(\dots, u, \dots, w, \dots) + \omega(\dots, w, \dots, u, \dots) + \omega(\dots, w, \dots, w, \dots) = \\ &= \omega(\dots, u + w, \dots, u + w, \dots) = 0. \end{aligned}$$

□

8.1.1. Кососимметричные n -линейные формы. Линейная по каждому своему аргументу функция $V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$ от k векторов пространства V называется k -линейной формой на V .

УПРАЖНЕНИЕ 8.1. Убедитесь, что k -линейные формы образуют векторное пространство относительно обычных операций сложения функций и умножения функций на константы, а кососимметричные формы составляют в нём векторное подпространство.

ЛЕММА 8.2

Любые две n -линейные кососимметричные формы на n -мерном векторном пространстве V пропорциональны.

Доказательство. Рассмотрим n -линейную кососимметричную форму $\omega : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$, зафиксируем в пространстве V какой-нибудь базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ и выразим значение $\omega(v_1, \dots, v_n)$ на векторах $(v_1, \dots, v_n) = (e_1, \dots, e_n)C$, где в j -том столбце матрицы C стоят координаты вектора v_j в базисе e , через значение $\omega(e_1, \dots, e_n)$. Так как ω линейна по каждому аргументу,

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega\left(\sum_{i_1} e_{i_1} c_{i_1 1}, \dots, \sum_{i_n} e_{i_n} c_{i_n n}\right) = \sum_{i_1, \dots, i_n} c_{i_1 1} \dots c_{i_n n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}).$$

Так как при совпадении каких-либо двух аргументов форма ω зануляется, в последней сумме отличны от нуля только слагаемые с попарно разными индексами i_1, \dots, i_n . Каждый такой набор индексов имеет вид $g(1), \dots, g(n)$, где $g : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ — некоторая биекция. Все

¹Функция от нескольких аргументов называется *знакопеременной*, если при перестановке любых двух аргументов она меняет знак (умножается на -1).

такие биекции образуют группу преобразований, которая обозначается S_n и называется *группой перестановок n символов* или *n -той симметрической группой*. В силу знакопеременности формы ω , для каждой перестановки $g \in S_n$ выполняется равенство

$$\omega(e_{g(1)}, \dots, e_{g(n)}) = \operatorname{sgn}(g)\omega(e_1, \dots, e_n),$$

где $\operatorname{sgn}(g) = \pm 1$ означает *знак* перестановки g , равный $+1$ для чётных перестановок, и -1 для нечётных¹. Таким образом,

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(e_1, \dots, e_n) \cdot \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) c_{g(1)1} c_{g(2)2} \cdots c_{g(n)n}.$$

Правая сумма называется *определителем $n \times n$ матрицы $C = (c_{ij})$* и обозначается

$$\det C \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) c_{g(1)1} c_{g(2)2} \cdots c_{g(n)n} \quad (8-2)$$

Поскольку $\det C$ зависит только от матрицы C , но не от формы ω , для любых двух n -линейных кососимметричных форм ω_1, ω_2 и векторов $v_1, \dots, v_n \in V$ имеется равенство

$$\frac{\omega_1(v_1, \dots, v_n)}{\omega_2(v_1, \dots, v_n)} = \frac{\omega_1(e_1, \dots, e_n)}{\omega_2(e_1, \dots, e_n)}.$$

Мы заключаем, что его левая часть не зависит от выбора векторов v_i , т. е. ω_1 и ω_2 пропорциональны. \square

8.1.2. Определитель матрицы. Равенство (8-2) предписывает всеми возможными способами выбирать n элементов матрицы C так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось выбрано ровно по одному элементу. Клетки, где находятся выбранные элементы, задают биекцию $g : j \mapsto g(j)$ из множества столбцов в множество строк матрицы C . Каждую выбранную n -ку элементов следует перемножить и умножить на знак перестановки g , которую она задаёт. Полученные таким образом $n!$ произведений складываются.

ПРИМЕР 8.1

Определители матриц размера 2×2 и 3×3 имеют вид

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \quad (8-3)$$

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = c_{11}c_{22}c_{33} + c_{13}c_{21}c_{32} + c_{12}c_{23}c_{31} - \\ - c_{11}c_{23}c_{32} - c_{13}c_{22}c_{31} - c_{12}c_{21}c_{33}. \quad (8-4)$$

Во втором равенстве сначала выписаны тождественная и две циклических перестановки, потом — три транспозиции.

¹Я рассчитываю, что читатель знает про чётность перестановок и мультипликативный гомоморфизм $\operatorname{sgn} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ из курса алгебры. Если это не так, то все необходимые сведения можно почерпнуть из добавления в п° 8.3 ниже.

ПРИМЕР 8.2 (ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ТРЕУГОЛЬНОЙ МАТРИЦЫ)

Если матрица C верхнетреугольная¹, т. е. $c_{ij} = 0$ при $i > j$, то единственным ненулевым слагаемым в сумме (8-2) будет произведение диагональных элементов матрицы C , отвечающее тождественной перестановке $g = \text{Id}$. Таким образом, для верхнетреугольной матрицы C определитель $\det C = \prod_i c_{ii}$. В частности, $\det E = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1

Для любой квадратной матрицы C выполняется равенство $\det C = \det C^t$.

Доказательство. Суммы (8-2), вычисляющие $\det C$ и $\det C^t$, состоят из одних и тех же произведений всевозможных n -ок элементов матрицы, устанавливающих биекцию $g: j \mapsto g_j$ между номерами столбцов и номерами строк, только в первой из сумм отвечающее такой биекции произведение берётся со знаком $\text{sgn}(g)$, а во второй — со знаком $\text{sgn}(g^{-1})$. Но обратные друг другу перестановки имеют одинаковую чётность: если $g = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m$, где σ_i — транспозиции, то $g^{-1} = \sigma_m \sigma_{m-1} \cdots \sigma_1$ в силу равенства $\sigma_i \sigma_i = \text{Id}$. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2

Определитель линеен по каждому столбцу матрицы C и обращается в нуль, если какие-то два столбца совпадают.

Доказательство. Первое вытекает из формулы (8-2): так как каждое из суммируемых произведений линейно зависит от каждого столбца, вся сумма тоже линейна по каждому столбцу. Если i -й столбец матрицы C совпадает с j -м, то в сумме (8-2) слагаемое, отвечающее перестановке g сократится со слагаемым, отвечающим перестановке $h = g\sigma_{ij}$, где σ_{ij} меняет местами i и j , а все остальные номера оставляет на месте. В самом деле, $\text{sgn}(h) = -\text{sgn}(g)$, а отвечающие h и g произведения матричных элементов совпадают: $\cdots c_{h(i)i} \cdots c_{h(j)j} \cdots = \cdots c_{g(j)i} \cdots c_{g(i)j} \cdots = \cdots c_{g(j)j} \cdots c_{g(i)i} \cdots = \cdots c_{g(i)i} \cdots c_{g(j)j} \cdots$. \square

СЛЕДСТВИЕ 8.1

Определитель $n \times n$ -матрицы является n -линейной кососимметричной функцией как столбцов, так и строк.

СЛЕДСТВИЕ 8.2

Пространство n -линейных кососимметричных форм на n -мерном векторном пространстве V одномерно.

Доказательство. По лем. 8.2 на стр. 96 все n -линейные кососимметричные формы на V пропорциональны. Поэтому достаточно предъявить хотя бы одну такую форму, не равную тождественно нулю. Зафиксируем в V любой базис e_1, \dots, e_n и для векторов v_1, \dots, v_n , которые линейно выражаются через него по формуле $(v_1, \dots, v_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$, положим $\omega(v_1, \dots, v_n) = \det C$. Эта форма полилинейна и кососимметрична по предл. 8.2, а в прим. 8.2 видели, что $\omega_e(e_1, \dots, e_n) = \det E = 1$. \square

¹См. прим. 5.6 на стр. 69.

Следствие 8.3

На каждом n -мерном векторном пространстве V существует единственная с точностью до пропорциональности ненулевая форма n -мерного объёма ω . Если векторы e_1, \dots, e_n образуют базис в V , а векторы v_1, \dots, v_n выражаются через него как $(v_1, \dots, v_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$, то

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(e_1, \dots, e_n) \cdot \det C.$$

Доказательство. По лем. 8.1 на стр. 95 каждая форма объёма на V кососимметрична и n -линейна. По предыдущему следствию n -линейные кососимметричные формы на V составляют одномерное векторное пространство. Достаточно убедиться, что любая из них является формой объёма, т. е. удовлетворяет условиям (1) и (2) из н° 8.1 на стр. 95. Но условие (2) является составной частью требования линейности формы по каждому аргументу, и в силу линейности

$$\omega(\dots, u + \lambda w, \dots, w, \dots) = \omega(\dots, u, \dots, w, \dots) + \lambda \omega(\dots, w, \dots, w, \dots).$$

Из-за кососимметричности второе слагаемое зануляется, что и доказывает условие (1). \square

8.1.3. Определитель линейного оператора. Зафиксируем на n -мерном векторном пространстве V форму объёма ω . Для любого линейного оператора $F : V \rightarrow V$ форма

$$\omega_F(v_1, \dots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(Fv_1, \dots, Fv_n)$$

полилинейна и кососимметрична. Поэтому она пропорциональна форме ω . Коэффициент пропорциональности ω_F / ω равен отношению значений этих форм на элементах произвольного базиса $e = (e_1, \dots, e_n)$ пространства V и не зависит от выбора базиса. Поскольку

$$(Fe_1, Fe_2, \dots, Fe_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot F_e,$$

где F_e — матрица оператора F в базисе e , коэффициент пропорциональности

$$\frac{\omega_F}{\omega} = \frac{\omega(Fe_1, Fe_2, \dots, Fe_n)}{\omega(e_1, \dots, e_n)} = \frac{\omega(e_1, \dots, e_n) \cdot \det F_e}{\omega(e_1, \dots, e_n)} = \det F_e.$$

Мы заключаем, что определитель $\det F_e$ матрицы оператора не зависит от выбора базиса e , в котором пишется матрица, и при применении оператора F к любому набору векторов объём натянутого на них параллелепипеда умножается на $\det F_e$. Определитель $\det F_e$ называется *определителем линейного оператора* $F : V \rightarrow V$ и обозначается $\det F$.

Поскольку при последовательном выполнении операторов $G : V \rightarrow V$ и $F : V \rightarrow V$ объёмы параллелепипедов умножаются сначала на $\det(G)$, а потом на $\det(F)$, мы заключаем, что для любых двух линейных операторов $F, G : V \rightarrow V$ выполняется равенство

$$\det(FG) = \det(F) \det(G) \tag{8-5}$$

В частности, $\det(FG) = \det(GF)$.

Предложение 8.3

Линейный оператор $F : V \rightarrow V$ биективен если и только если $\det F \neq 0$.

Доказательство. Если оператор F биективен, то он обратим. Вычисляя определитель обеих частей в матричном равенстве $FF^{-1} = \text{Id}$, получаем $\det F \det F^{-1} = 1$, откуда $\det F \neq 0$. Если оператор не биективен, то столбцы его матрицы F_e линейно зависимы по сл. 5.1 на стр. 64, откуда $\det F = \det F_e = 0$. \square

Следствие 8.4

Квадратная матрица A обратима если и только если $\det A \neq 0$. \square

8.1.4. Специальная линейная группа. Из предыдущего вытекает, что операторы определителя 1 образуют в полной линейной группе $GL(V)$ подгруппу. Она обозначается $SL(V)$ и называется *специальной линейной группой* пространства V . Геометрически, специальная линейная группа состоит из всех операторов, сохраняющих ненулевую форму объёма на V , и это свойство не зависит от выбора формы объёма. Специальная линейная группа координатного пространства \mathbb{k}^n состоит из матриц определителя 1 и обозначается $SL_n(\mathbb{k}) \subset GL_n(\mathbb{k})$.

8.1.5. Мультипликативность определителя. Обозначим через $K = \mathbb{Z}[a_{ij}, b_{ij}]$ кольцо многочленов с целыми коэффициентами от $2n^2$ независимых переменных a_{ij} и b_{ij} , где $1 \leq i, j \leq n$, и рассмотрим в кольце $\text{Mat}_n(K)$ матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, элементами которых являются эти переменные.

УПРАЖНЕНИЕ 8.2. Покажите, что многочлен $f(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_m]$ над бесконечным полем \mathbb{k} принимает нулевое значение в каждой точке координатного аффинного пространства \mathbb{k}^m если и только если все его коэффициенты нулевые.

Следствие 8.5 (мультипликативность определителя)

В кольце $K = \mathbb{Z}[a_{ij}, b_{ij}]$ выполняется равенство $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Доказательство. Поскольку поле \mathbb{Q} бесконечно, многочлен $\det(AB) - \det(A) \cdot \det(B)$ является нулевым если и только если он принимает нулевое значение во всех точках аффинного пространства \mathbb{Q}^{2n^2} с координатами a_{ij}, b_{ij} , т. е. тогда и только тогда, когда равенство $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ выполняется для всех рациональных матриц A и B . Но для таких матриц оно превращается в равенство (8-5) для линейных операторов

$$F: \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}^n, x \mapsto Ax, \quad \text{и} \quad G: \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}^n, x \mapsto Bx,$$

имеющих в стандартном базисе координатного пространства \mathbb{Q}^n матрицы A и B . □

8.2. Правила Крамера. Для векторов $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{k}^n$ обозначим через $\det(v_1, \dots, v_n)$ определитель матрицы, составленной из координат этих векторов. Поскольку определитель не меняется при транспонировании, не имеет значения как записываются координаты — по строкам или по столбцам. Непосредственным обобщением лем. 1.2 на стр. 11 является

Предложение 8.4 (первое правило Крамера)

Векторы v_1, \dots, v_n образуют базис в \mathbb{k}^n если и только если $\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$, и тогда i -тая координата произвольного вектора $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$ в этом базисе равна

$$x_i = \frac{\det(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n)}{\det(v_1, \dots, v_n)}. \quad (8-6)$$

Доказательство. По предл. 5.2 на стр. 64 векторы $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{k}^n$ образуют базис если и только если матрица их координат обратима, что равносильно условию $\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$ по сл. 8.4 на стр. 99. Если v_1, \dots, v_n образуют базис, то у каждого $w \in \mathbb{k}^n$ есть единственное разложение $w = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Применяя к обеим частям этого равенства линейный функционал

$$V \rightarrow \mathbb{k}, \quad u \mapsto \det(v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_n),$$

получаем равенство $\det(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n) = x_i \cdot \det(v_1, \dots, v_n)$. □

Пример 8.3 (уравнение гиперплоскости)

Пусть n точек p_1, \dots, p_n в аффинном координатном пространстве \mathbb{K}^n не лежат в одном $(n-2)$ -мерном аффинном подпространстве. Тогда, согласно предл. 4.4 на стр. 54 через них проходит единственная гиперплоскость. Точка x лежит в этой гиперплоскости если и только если вектор $\overline{p_n x} = x - p_n$ линейно выражается через $n-1$ векторов $\overline{p_n p_1}, \overline{p_n p_2}, \dots, \overline{p_n p_{n-1}}$, что равносильно равенству $\det(x - p_n, p_1 - p_n, p_2 - p_n, \dots, p_{n-1} - p_n) = 0$. В силу полилинейности определителя, это соотношение представляет собою неоднородное линейное уравнение на x , которое можно переписать как $\det(x, p_1 - p_n, p_2 - p_n, \dots, p_{n-1} - p_n) = \det(p_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$. Например, в трёхмерном аффинном координатном пространстве \mathbb{K}^3 плоскость $p + \lambda u + \mu v$, проходящая через точку p параллельно векторам u, v , задаётся неоднородным линейным уравнением $\det(x, u, v) = \det(p, u, v)$.

8.2.1. Присоединённая матрица. Для квадратной матрицы $C = (c_{ij})$ обозначим через C_{ij} подматрицу размера $(n-1) \times (n-1)$, которая получается из C удалением i -й строки и j -го столбца. Число $(-1)^{i+j} \det C_{ij}$ называется алгебраическим дополнением к элементу c_{ij} матрицы C . Транспонированная к матрице из алгебраических дополнений матрица

$$C^\vee = (c_{ij}^\vee), \quad \text{где } c_{ij}^\vee = (-1)^{i+j} \det C_{ji},$$

называется присоединённой¹ к матрице C .

Предложение 8.5 (формула для обратной матрицы)

Если матрица $C \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ обратима, то $C^{-1} = \frac{1}{\det C} C^\vee$.

Доказательство. Если матрица C обратима, то её столбцы v_1, \dots, v_n образуют базис \mathbf{v} координатного пространства \mathbb{K}^n . Стандартный базис $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ пространства \mathbb{K}^n выражается через него по формуле $\mathbf{e} = \mathbf{v} C^{-1}$. Таким образом, i -й элемент j -го столбца матрицы C^{-1} является коэффициентом при v_i в разложении вектора e_j по базису \mathbf{v} . По правилу Крамера он равен

$$\frac{\det(v_1, \dots, v_{i-1}, e_j, v_{i+1}, \dots, v_n)}{\det C}.$$

В числителе стоит определитель матрицы, имеющей в i -м столбце ровно один ненулевой элемент — единицу, стоящую в j -й строке. Переставим её в верхний левый угол, сделав $i-1$ транспозиций столбцов и $j-1$ транспозиций строк:

$$\begin{aligned} \det(v_1, \dots, v_{i-1}, e_j, v_{i+1}, \dots, v_n) &= (-1)^{i-1} \det(e_j, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n) = \\ &= (-1)^{i+j-2} \det \begin{pmatrix} 1 & c_{j,1} & \cdots & c_{j,i-1} & c_{j,i+1} & \cdots & c_{j,n} \\ 0 & c_{1,2} & \cdots & c_{1,i-1} & c_{1,i+1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{j-1,2} & \cdots & c_{j-1,i-1} & c_{j-1,i+1} & \cdots & c_{j-1,n} \\ 0 & c_{j+1,2} & \cdots & c_{j+1,i-1} & c_{j+1,i+1} & \cdots & c_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n,1} & \cdots & c_{n,i-1} & c_{n,i+1} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ненулевой вклад в этот определитель дают только перестановки, оставляющие 1 на месте. Сумма произведений матричных элементов, отвечающих таким перестановкам, равна определителю $(n-1) \times (n-1)$ -матрицы, получающейся удалением j -й строки и i -го столбца из матрицы C . Тем самым, $\det(v_1, \dots, v_{i-1}, e_j, v_{i+1}, \dots, v_n) = c_{ij}^\vee$. \square

¹По-английски *adjunct*.

ПРИМЕР 8.4

Матрицы размеров 2×2 и 3×3 с определителем 1 обращаются по формулам

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}) & -(c_{12}c_{33} - c_{13}c_{31}) & (c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}) \\ -(c_{21}c_{33} - c_{23}c_{31}) & (c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31}) & -(c_{11}c_{23} - c_{13}c_{21}) \\ (c_{21}c_{32} - c_{22}c_{31}) & -(c_{11}c_{32} - c_{12}c_{32}) & (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) \end{pmatrix}$$

Для матриц с отличным от единицы определителем все матричные элементы в правых частях надо поделить на определитель матрицы из левой части.

Следствие 8.6

Обозначим через $K = \mathbb{Z}[c_{ij}]$ кольцо многочленов от n^2 переменных c_{ij} , где $1 \leq i, j \leq n$, а через $C = (c_{ij}) \in \text{Mat}_n(K)$ матрицу, элементами которой являются эти переменные. В кольце $\text{Mat}_n(K)$ матриц с элементами из K выполняется равенство

$$C \cdot C^{\vee} = C \cdot C^{\vee} = \det(C) \cdot E. \quad (8-7)$$

Доказательство. Приравнявая соответственные матричные элементы в правой и левой части равенства (8-7), мы получаем набор из n^2 равенств между многочленами с целыми коэффициентами от переменных c_{ij} . Чтобы доказать каждое такое равенство, достаточно проверить, что оно превращается в верное числовое равенство для всех наборов из n^2 численных значений $c_{ij} \in \mathbb{R}$ из некоторого всюду плотного подмножества в \mathbb{R}^{n^2} .

УПРАЖНЕНИЕ 8.3 (по анализу). Убедитесь в этом, а также в том, что для любого ненулевого многочлена $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$ множество $\mathcal{D}(f) = \{p \in \mathbb{R}^m \mid f(p) \neq 0\}$ всюду плотно в \mathbb{R}^m .

Таким образом, достаточно проверить равенство (8-7) для всех числовых матриц $C \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, имеющих $\det C \neq 0$, что и было сделано в предл. 8.5. \square

Следствие 8.7 (разложение определителя по i -й строке или i -у столбцу)

В кольце $n \times n$ матриц $\text{Mat}_n(K)$ с элементами из кольца $K = \mathbb{Z}[c_{ij}]$ выполняется равенство

$$\det C = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} c_{ik} \det C_{ik} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} c_{ki} \det C_{ki}.$$

Доказательство. Соотношения получаются приравниванием (i, i) -тых диагональных элементов матриц из правой и левой части (8-7). \square

ПРИМЕР 8.5

Раскладывая определитель 3×3 по первому столбцу, получаем

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = c_{11} (c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}) - c_{21} (c_{12}c_{33} - c_{13}c_{32}) + c_{31} (c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}).$$

что согласуется с прямым вычислением из прим. 8.1.

8.2.2. Тожество Гамильтона – Кэли. Для любого коммутативного кольца K с единицей кольцо $n \times n$ матриц $\text{Mat}_n(K[t])$ с элементами из кольца многочленов $K[t]$ совпадает с кольцом многочленов $\text{Mat}_n(K)[t]$ от переменной t с коэффициентами в кольце матриц $\text{Mat}_n(K)$, поскольку каждую матрицу, в клетках которой стоят многочлены от t , можно записать как многочлен от t с матричными коэффициентами и наоборот. Например,

$$\begin{pmatrix} 3t^2 + 2t & t^3 - 1 \\ 2t + 3 & t^3 + t - 1 \end{pmatrix} = t^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1

Для матрицы $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_n(K)$ многочлен

$$\chi_A(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det(tE - A) = t^n - \sigma_1(A) \cdot t^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1}(A) \cdot t + (-1)^n \sigma_n(A) \in K[t]$$

называется *характеристическим многочленом* матрицы A . Коэффициент при t^{n-k} в характеристическом многочлене обозначается через $(-1)^k \sigma_k(A)$.

УПРАЖНЕНИЕ 8.4. Убедитесь, что число $\sigma_k(A) \in K$ равно сумме определителей всех таких $k \times k$ подматриц матрицы A , главная диагональ которых является подмножеством главной диагонали матрицы A . В частности, $\sigma_1(A) = \text{tr}(A)$ и $\sigma_n(A) = \det A$.

ТЕОРЕМА 8.1 (тождество Гамильтона – Кэли)

Пусть, как и выше, $K = \mathbb{Z}[a_{ij}]$ является кольцом многочленов от n^2 переменных a_{ij} . Тогда в кольце матриц $\text{Mat}_n(K)$ для матрицы $A = (a_{ij})$ выполняется равенство $\chi_A(A) = 0$.

Доказательство. Подставляя в форм. (8-7) на стр. 102 вместо C матрицу $tE - A$, где E — единичная матрица размера $n \times n$, заключаем, что в кольце $\text{Mat}_n(K[t])$ выполняется равенство

$$\det(tE - A) \cdot E = (tE - A)(tE - A)^\vee,$$

где $(tE - A)^\vee$ — присоединённая¹ к $(tE - A)$ матрица. Перепишем это равенство в виде равенства между многочленами от t с коэффициентами в кольце матриц $\text{Mat}_n(K)$:

$$t^n \cdot E - \sigma_1(A) t^{n-1} \cdot E + \dots + (-1)^n \sigma_n(A) \cdot E = (tE - A) (t^m \cdot A_m^\vee + \dots + t \cdot A_1^\vee + A_0^\vee),$$

где $A_0^\vee, A_1^\vee, \dots, A_m^\vee \in \text{Mat}_n(K)$ — некоторые матрицы. Подставляя в него $t = A$, получаем в кольце $\text{Mat}_n(K)$ равенство $\chi_A(A) \cdot E = 0$, откуда $\chi_A(A) = 0$. \square

8.2.3. Однородные системы из n линейных уравнений на $n+1$ неизвестных. Пространство решений системы из n линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (8-8)$$

¹См. н° 8.2.1 на стр. 101.

на $n+1$ неизвестных (x_0, x_1, \dots, x_n) , рассматриваемых как вектор-столбец координатного пространства \mathbb{K}^{n+1} , является аннулятором линейной оболочки строк матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

в двойственном координатном пространстве \mathbb{K}^{n+1*} . Если строки этой матрицы линейно независимы, пространство решений системы (8-8) одномерно, и базисный вектор в этом подпространстве можно указать явно. Для этого обозначим через

$$A_i \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^i \det \begin{pmatrix} a_{1,0} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,0} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad (8-9)$$

определитель $n \times n$ матрицы, получающихся из A выкидыванием i -го столбца.

Предложение 8.6 (второе правило Крамера)

Уравнения (8-8) линейно независимы если и только если вектор $a = (A_0, A_1, \dots, A_n) \neq 0$, и в этом случае вектор a порождает одномерное пространство решений системы (8-8).

Доказательство. Допишем к матрице A сверху ещё одну копию её i -той строки. Определитель получившейся матрицы размера $(n+1) \times (n+1)$ равен нулю. Раскладывая его по верхней строке, получаем $a_{i0}A_0 + a_{i1}A_1 + \dots + a_{in}A_n = 0$. Тем самым, вектор $a = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ в любом случае является решением системы (8-8). Если строки матрицы A линейно зависимы, то и строки всех матриц (8-9) линейно зависимы с теми же самыми коэффициентами. Поэтому все компоненты вектора A в таком случае нулевые. Если же ковекторы $\alpha_i = (a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n})$ линейно независимы в \mathbb{K}^{n+1*} , то по лемме о замене¹ их можно дополнить до базиса в \mathbb{K}^{n+1*} одним из стандартных базисных ковекторов e_i^* . Определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{10} & \cdots & \cdots & a_{1i} & \cdots & \cdots & a_{ni} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n0} & \cdots & \cdots & a_{ni} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

в строки которой записаны координаты базисных ковекторов $e_i^*, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, отличен от нуля. Раскладывая его по первой строке, видим, что он равен $(-1)^i A_i$, откуда $A_i \neq 0$. \square

Пример 8.6 (пересечение аффинных плоскостей в \mathbb{K}^3)

Две непараллельные плоскости, заданные в трёхмерном аффинном координатном пространстве уравнениями

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = c \\ b_1x + b_2y + b_3z = d \end{cases}$$

¹См. лем. 4.2 на стр. 48.

с непропорциональными левыми частями (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) , пересекаются по прямой с вектором скорости $v = (a_2b_3 - a_3b_2, -a_1b_3 + a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1)$, который является базисным решением системы однородных уравнений

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0. \end{cases}$$

Если, скажем, первая компонента вектора v ненулевая, то эта прямая проходит через точку p с координатами $(0, p_2, p_3)$, где

$$p_2 = \frac{cb_3 - da_3}{a_2b_3 - b_2a_3}, \quad p_3 = \frac{a_2d - b_2c}{a_2b_3 - b_2a_3}$$

это единственное решение системы неоднородных уравнений

$$\begin{cases} a_2y + a_3z = c \\ b_2y + b_3z = d. \end{cases}$$

8.3. Комбинаторное добавление: длина и знак перестановки. Каждую перестановку

$$(g_1, g_2, \dots, g_n)$$

чисел $(1, 2, \dots, n)$ можно воспринимать как взаимно однозначное отображение

$$g: \{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow{\cong} \{1, 2, \dots, n\}, \quad i \mapsto g_i.$$

Иными словами, перестановки образуют группу всех биективных отображений множества

$$N = \{1, 2, \dots, n\}$$

в себя. Эта группа обозначается S_n и называется *n-той симметрической группой*. Скажем, что упорядоченная пара $i < j$ элементов множества N является *инверсной* для заданной перестановки $g = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in S_n$, если $g_i > g_j$. Таким образом, каждая перестановка $g \in S_n$ разбивает множество всех $n(n-1)/2$ упорядоченных пар $i < j$ на два непересекающихся подмножества — инверсные пары и неинверсные пары. Количество $\ell(g)$ инверсных пар перестановки g называется *числом инверсий* или *длиной* перестановки g .

УПРАЖНЕНИЕ 8.5. Найдите $\max \ell(g)$ по всем $g \in S_n$ и укажите все перестановки на которых он достигается.

Число $\text{sgn}(g) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\ell(g)}$ называется *знаком* перестановки g . Перестановка g называется *чётной*, если $\text{sgn}(g) = 1$ и *нечётной*, если $\text{sgn}(g) = -1$.

Перестановка, меняющая местами какие-либо два элемента i, j и оставляющая все остальные элементы на месте, обозначается σ_{ij} и называется *транспозицией* i -го и j -го элементов.

УПРАЖНЕНИЕ 8.6. Убедитесь, что каждая перестановка $g \in S_n$ является композицией транспозиций.

Обратите внимание, что разложение перестановки в композицию транспозиций не единственно: например, транспозицию $\sigma_{13} = (3, 2, 1) \in S_3$ иначе можно записать как $\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}$ или как $\sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}$. Тем не менее чётность количества транспозиций, в композицию которых раскладывается данная перестановка g , не зависит от способа разложения и совпадает с чётностью числа инверсных пар перестановки g , т. е. все чётные перестановки являются композициями чётного числа транспозиций, а нечётные — нечётного. Это вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 8.3

$\operatorname{sgn}(g\sigma_{ij}) = -\operatorname{sgn}(g)$ для любой перестановки $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ и любой транспозиции σ_{ij} .

Доказательство. Перестановки

$$\begin{aligned} g &= (g_1, \dots, g_{i-1}, g_i, g_{i+1}, \dots, g_{i-1}, g_j, g_{j+1}, \dots, g_n) \\ g\sigma_{ij} &= (g_1, \dots, g_{i-1}, g_j, g_{i+1}, \dots, g_{i-1}, g_i, g_{j+1}, \dots, g_n) \end{aligned} \quad (8-10)$$

отличаются друг от друга транспозицией элементов g_i и g_j , стоящих на i -том и j -том местах перестановки g . В этих двух перестановках пара (i, j) , а также $2(j - i - 1)$ пар вида (i, m) и (m, j) с произвольным m из промежутка $i < m < j$ имеют противоположную инверсность, а инверсность всех остальных пар одинакова. \square

Следствие 8.8

Если перестановка g является композицией m транспозиций, то $\operatorname{sgn}(g) = (-1)^m$ и чётность перестановки совпадает с чётностью числа m .

Доказательство. Тожественная перестановка не имеет инверсных пар и, стало быть, чётна. В силу леммы, перестановка получающаяся из тождественной умножением на m транспозиций, имеет чётность $(-1)^m$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 8.7. Убедитесь, что $\operatorname{sgn}(gh) = \operatorname{sgn}(g)\operatorname{sgn}(h)$, т. е. отображение $\operatorname{sgn} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ является гомоморфизмом групп.

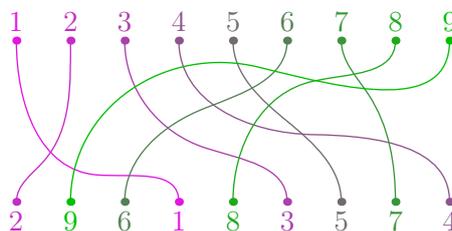


Рис. 8♦3. $\operatorname{sgn}(2, 9, 6, 1, 8, 3, 5, 7, 4) = +1$ (всего 18 пересечений).

ПРИМЕР 8.7 (ПРАВИЛО НИТОЧЕК)

Чётность числа инверсных пар может быть определена следующим наглядным способом, известным как *правило ниточек*¹. Запишем исходные числа и их перестановку друг под другом, как на рис. 8♦3, и соединим одинаковые числа нитями так, чтобы ни одна из нитей не вылезла за пределы прямоугольника, образованного четырьмя угловыми числами, и чтобы все точки пересечения нитей были простыми двойными². Тогда чётность числа инверсных пар равна чётности числа точек пересечения нитей.

¹Этот способ не слишком эффективен, когда требуется отыскать знак конкретной перестановки длинного набора чисел — обычно быстрее бывает разложить перестановку в композицию непересекающихся циклов и воспользоваться тем, что циклы чётной длины нечётны, а циклы нечётной длины чётны. Однако правило ниточек часто оказывается полезным при анализе абстрактных перестановок.

²Т. е. в каждой точке пересечения встречается ровно две нити, причём их касательные в точке пересечения различны.

Упражнение 8.8. Докажите это и найдите при помощи правила ниточек чётность *тасующей* перестановки $(i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_m)$, в которой наборы номеров

$$(i_1, i_2, \dots, i_k) \text{ и } (j_1, j_2, \dots, j_m)$$

не пересекаются, и каждый из них строго возрастает слева направо.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

- Упр. 8.2. При $m = 1$ ненулевой многочлен $f(x_1) \in \mathbb{k}[x_1]$ имеет не более $\deg f$ корней и, тем самым, не обращается в нуль почти во всех точках бесконечной прямой \mathbb{k}^1 . При $m > 1$ перепишите многочлен $f(x_1, \dots, x_m)$ в виде многочлена от x_m с коэффициентами из $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_{m-1}]$ и примените индукцию по m .
- Упр. 8.3. Так как разность двух многочленов является непрерывной функцией, из того, что она обращается в нуль на всюду плотном подмножестве, вытекает, что она равна нулю всюду, а поскольку поле \mathbb{R} бесконечно, многочлен от n^2 переменных, принимающий нулевые значения во всех точках аффинного пространства \mathbb{R}^{n^2} , является нулевым многочленом¹. Всюду плотность множества $\mathcal{D}(f)$ означает, что в любой ε -окрестности² каждой точки $p \in \mathbb{R}^m$ найдётся точка $r \neq p$, в которой $f(r) \neq 0$. Так как многочлен f ненулевой, имеется точка $q \in \mathbb{R}^m$ с $f(q) \neq 0$. Ограничение f на прямую (pq) , будучи ненулевым многочленом от одной переменной, обращается в нуль лишь в конечном числе точек.
- Упр. 8.5. $\max \ell(g) = n(n-1)/2$ достигается на единственной перестановке $(n, n-1, \dots, 1)$.
- Упр. 8.6. Индукция по n . Каждая перестановка $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ является композицией $g = \sigma \circ g'$ транспозиции σ , переставляющей между собою элементы n и g_n множества $\{1, 2, \dots, n\}$, и перестановки $g' = \sigma \circ g$, оставляющей на месте элемент n . По индукции, g' раскладывается в композицию транспозиций, не затрагивающих элемента n .
- Упр. 8.8. Если все точки пересечения двойные и трансверсальные, две нити, выходящие из элементов i и j пересекаются между собою нечётное число раз если и только если (i, j) инверсна³. Знак тасующей перестановки $(i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_m)$ равен $(-1)^{|I| + \frac{1}{2}k(k+1)}$, где $\text{вес } |I| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_v i_v$. Действительно, нити, выходящие из чисел i_1, i_2, \dots, i_k верхней строчки не пересекаются между собою и пересекают, соответственно, $i_1 - 1, i_2 - 2, \dots, i_k - k$ начинающихся левее нитей, выходящих из j -точек и тоже между собою не пересекающихся.

¹См. упр. 8.2 на стр. 100.

²Под ε -окрестностью точки $p \in \mathbb{R}^m$ мы понимаем m -мерный куб с центром в точке p и стороной 2ε .

³В действительности картинку всегда можно нарисовать так, чтобы в этом случае была ровно одна точка пересечения.