

Задачи для подготовки к контрольной № 6

ПК6♦1. Постройте рациональные параметризации аффинных коник

- а) $-4x^2 + 28xy + 8x - 28y^2 - 12y - 1 = 0$
- б) $-12x^2 - 44xy - 65y^2 + 10y - 1 = 0$
- в) $-20x^2 - 36xy - 8x - 28y^2 - 4y - 1 = 0.$

ОТВЕТ: а) $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{2t}{1+t^2}$; б) $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{2t}{1+t^2}$; в) $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{2t}{1+t^2}$

ПК6♦2. Доподлинно выясните, совпадают ли Ваши ответы к предыдущей задаче с указанными в ней ответами с точностью до дробно линейного преобразования параметра t .

ПК6♦3. Для гомографии $\varphi : \mathbb{P}_1(\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$ найдите прообраз точки

- а) $13/23$, если φ переводит $1/2$ в $4/7$, $4/7$ в $29/51$, а $5/8$ в $17/30$,
- б) $-62/35$, если φ переводит $-1/3$ в $-7/4$, $-2/7$ в $-16/9$, а $-3/10$ в $-23/13$,
- в) $-76/163$, если φ переводит $-1/3$ в $-1/2$, $-2/7$ в $-8/17$, а $-5/18$ в $-7/15$.

ОТВЕТ: а) $1/2$; б) $-1/3$; в) $-1/3$

ПК6♦4. Найдите неподвижные точки инволюции $\sigma : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{P}_1(\mathbb{C}), \sigma^2 = \text{Id}$, если

- а) $\sigma(-4) = \infty$, а $\sigma(-1) = 3/2$
- б) $\sigma(2/3) = 3$, а $\sigma(-2/3) = 1/4$
- в) $\sigma(2) = 1$, а $\sigma(4/3) = 4$.

ОТВЕТ: а) $1, -3, 2$; б) $1, -3, 2$; в) $1, -3, 2$

ПК6♦5. Найдите косинус меньшего из двух смежных углов между касательными прямыми

- а) опущенными на конику $-60x^2 - 52xy - 64x - 12y^2 - 28y - 17 = 0$ из точки $(0, -1)$
- б) опущенными на конику $-5x^2 - 18xy - 6x + 7y^2 - 2y - 1 = 0$ из точки $(-1/3, -1/6)$
- в) опущенными на конику $15x^2 + 56xy - 22x + 12y^2 - 28y + 7 = 0$ из точки $(2/5, 1/5)$

ОТВЕТ: а) $2/5$; б) $1/5$; в) $2/5$

ПК6♦6. Напишите однородное уравнение проективной коники, проходящей через

- а) точки $(-3 : -2 : 1), (16 : 9 : -6), (-3 : -3 : 1), (29 : 17 : -11), (-28 : -19 : 10)$
- б) точки $(0 : 3 : 1), (-1 : 1 : 1), (-3 : 14 : 6)$ и касающейся прямой $6x_0 - 6x_1 + 20x_2 = 0$ в точке $(3 : -7 : -3)$.
- в) точку $(1 : 0 : 0)$ и касающейся прямых $2x_0 + 12x_1 + 6x_2 = 0$ и $2x_0 - 2x_2 = 0$ соответственно в точках $(9 : -4 : 5)$ и $(1 : 0 : 1)$.

ОТВЕТ: а) $8x_0^2 - 12x_0x_1 + 40x_0x_2 + 3x_1^2 - 22x_1x_2 + 39x_2^2 = 0$; б) $4x_0^2x_1 + 4x_0x_2 - 4x_1^2x_2 - 4x_1x_2^2 = 0$; в) $21x_0^2 + 24x_0x_1 - 74x_0x_2 - 4x_1^2 - 57x_1x_2 = 0$

ПК6♦7. Определите типы евклидовых коник и для центральных коник найдите центры и

направления главных осей, а для парабол — направление оси и вершину.

а) $20x^2 + 52xy - 20x + 34y^2 - 24y + 9 = 0$

б) $-16x^2 - 76xy - 8x - 90y^2 - 20y - 1 = 0$

в) $-7x^2 + 20xy + 2x - 14y^2 - 4y = 0$

г) $20x^2 - 52xy + 32x + 34y^2 - 40y + 15 = 0$

д) $-x^2 - 4xy - 6x - 4y^2 - 8y + 3 = 0$

е) $-4x^2 - 12xy - 4x - 9y^2 - 8y + 4 = 0.$

в (е) парабола с осью (-4) и вершиной $(-\frac{169}{731}, \frac{418}{731})$.

в (д) парабола с осью (-4) и вершиной $(\frac{25}{87}, -\frac{25}{71})$.

в (г) эллипс с центром $(-6, -4)$ и осями вдоль векторов $(\frac{26}{7}, \frac{26}{5\sqrt{29}})$ и $(-\frac{26}{5\sqrt{29}}, \frac{26}{7})$.

в (в) гипербола с центром $(3, 2)$ и осями вдоль векторов $(\frac{20}{7}, \frac{20}{\sqrt{449}})$ и $(-\frac{20}{\sqrt{449}}, \frac{20}{7})$.

в (б) гипербола с центром $(-5, 2)$ и осями вдоль векторов $(-\frac{38}{37}, \frac{38}{\sqrt{2813}})$ и $(\frac{38}{\sqrt{2813}}, -\frac{38}{37})$.

ОТВЕТ: в (а) эллипс с центром $(7, -5)$ и осями вдоль векторов $(-\frac{26}{7}, \frac{26}{5\sqrt{29}})$ и $(\frac{26}{5\sqrt{29}}, -\frac{26}{7})$.