Задачи для подготовки к контрольной № 5

ПК5◇1. Билинейная форма $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ имеет в стандартном базисе матрицу Грама

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Существует ли в $\mathbb{C}^3$ такой базис, где эта форма имеет матрицу Грама

а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -3 & 9 & 14 \\ -1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$? **б)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 13 & -3 \\ -9 & -19 & 10 \end{pmatrix}$?

ОТВЕТ: в (а) — нет, в (б) — да; канонический оператор исходной формы $B^{-1}B^t = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -6 \\ 6 & 9 & 14 \\ -2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$ имеет характеристический многочлен $t^3+t^2-t-1 = (t-1)(t+1)^2$; в (б) канонический оператор $B^{-1}B^t = \begin{pmatrix} -23 & -60 & 54 \\ 14 & 37 & -34 \\ 6 & 16 & -15 \end{pmatrix}$ имеет характеристический многочлен $t^3+t^2-t-1 = (t-1)(t+1)^2$; в (а) канонический оператор $B^{-1}B^t = \begin{pmatrix} -11 & 30 & 36 \\ -4 & 11 & 14 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ имеет характеристический многочлен $t^3+t^2-t-1 = (t-1)(t+1)^2$.

ПК5◇2. Выясните, вырождено ли ограничение билинейной формы с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -4 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

в стандартном базисе пространства $\mathbb{Q}^4$ на подпространство $U \subset \mathbb{Q}^4$ решений системы

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0\,, \end{cases}$$

и если нет, найдите проекции вектора $v = (-1, 0, 6, 5)$ на U вдоль $U^\perp$ и на $U^\perp$ вдоль U.

ОТВЕТ: $v_U = (1, -2, 2, 1)$, $v_{U^\perp} = (-2, 2, 4, 4)$.

ПК5◇3. Те же вопросы про

а) форму $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & -6 & 16 & 7 \\ 7 & 16 & 14 & -7 \\ 0 & 7 & -7 & -8 \end{pmatrix}$ систему $\begin{cases} x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ -3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\,. \end{cases}$ и вектор $(26, -7, -5, -2)$

б) форму $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 7 \\ -2 & 0 & -12 & -15 \\ -7 & 12 & 0 & -11 \\ -7 & 15 & 11 & 0 \end{pmatrix}$ систему $\begin{cases} x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_2 - 9x_3 - 2x_4 = 0\,. \end{cases}$ и вектор $(30, 20, -7, 1)$

в) форму $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -9 & 11 \\ -5 & 4 & 6 & -7 \\ -9 & 6 & -2 & 4 \\ 11 & -7 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ систему $\begin{cases} x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0\,. \end{cases}$ и вектор $(-20, -29, -1, -3)$

ответ: в (а) $v_U = (6,-1,-1,0)$, $v_{U^\perp} = (20,-6,-4,-2)$, в (б) $v_U = (8,6,-2,0)$, $v_{U^\perp} = (22,14,-5,1)$, в (в) $v_U = (-1,-1,0,0)$, $v_{U^\perp} = (-19,-28,-1,-3)$.

ПК5⋄4. В $\mathbb{R}^4$ найдите ранг и сигнатуру ограничения квадратичной формы

а) $-4x_1^2-25x_2^2-2x_3^2-11x_4^2+20x_1x_2+4x_1x_3-6x_1x_4-10x_2x_3+16x_2x_4+2x_3x_4$ на ортогонал[1] к вектору $(0,3,0,-7)$

б) $x_1^2-3x_2^2+8x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-8x_1x_3+6x_2x_3+2x_2x_4-8x_3x_4$ на ортогонал к вектору $(4,5,2,3)$

в) $2x_1^2+2x_2^2+25x_3^2+18x_4^2+4x_1x_3-2x_1x_4-14x_2x_3+12x_2x_4-42x_3x_4$ на ортогонал к вектору $(1,2,-2,-3)$.

ответ: в (а) ранг 3 сигнатура $(1,2)$, в (б) ранг 2 сигнатура $(2,0)$, в (в) ранг 3 сигнатура $(2,1)$.

ПК5⋄5. Существует ли на $\mathbb{R}^6$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

а) $\Delta_1=0,\quad \Delta_2=0,\quad \Delta_3>0,\quad \Delta_4=0,\quad \Delta_5=0,\quad \Delta_6<0$

б) $\Delta_1=0,\quad \Delta_2>0,\quad \Delta_3>0,\quad \Delta_4=0,\quad \Delta_5=0,\quad \Delta_6<0$

в) $\Delta_1=0,\quad \Delta_2<0,\quad \Delta_3=0,\quad \Delta_4=0,\quad \Delta_5>0,\quad \Delta_6=0$

г) $\Delta_1>0,\quad \Delta_2=0,\quad \Delta_3=0,\quad \Delta_4>0,\quad \Delta_5=0,\quad \Delta_6>0$?

Если да, найдите её ранг, сигнатуру и приведите пример матрицы Грама с такими минорами. Если нет, обстоятельно объясните, почему.

ответ: форм с минорами (б) и (г) нет, форма в (а) имеет ранг 6 и сигнатуру $(3,3)$, в (в) — ранг 5 и сигнатуру $(3,2)$.

ПК5⋄6. Существует ли **а)** линейная обратимая **б)** ортогональная[2] замена координат в $\mathbb{R}^3$, переводящая квадратичную форму $x_1^2-11/9x_2^2+2/9x_3^2+32/9x_1x_2-16/9x_1x_3+8/3x_2x_3$ в квадратичную форму $-1/3x_1^2-2/3x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8/3x_1x_3-4/3x_2x_3$?

ответ: формы ортогонально эквивалентны, их матрицы Грама имеют одинаковые хар. многочлены: $t^3-7t+6 = (t-2)(t-1)(t+3)$.

ПК5⋄7. Те же вопросы про квадратичные формы

а) $-1/9x_1^2-7/9x_2^2-1/9x_3^2+8/9x_1x_2-16/9x_1x_3-8/9x_2x_3$ и $1/9x_1^2-14/9x_2^2-5/9x_3^2+4/9x_1x_2-32/9x_1x_3-28/9x_2x_3$

б) $10/9x_1^2+13/9x_2^2+13/9x_3^2-4/9x_1x_2-4/9x_1x_3+8/9x_2x_3$ и $11/9x_1^2-2/9x_2^2-x_3^2-8/3x_1x_2+32/9x_1x_3-16/9x_2x_3$.

ответ: В (а) формы линейно эквивалентны, а ортогонально — нет; хар. многочлены матриц Грама: $t^3+t^2-t-1 = (t-1)(t+1)^2$ и $t^3+2t^2-5t-6=(t-2)(t+1)(t+3)$. В (б) формы линейно не эквивалентны; хар. многочлены матриц Грама: $t^3-4t^2+5t-2=(t-2)(t-1)^2$ и $t^3-7t-6=(t-3)(t+1)(t+2)$.

ПК5⋄8. Найдите в $\mathbb{Q}^3$ все изотропные векторы квадратичных форм

а) $-3x_1^2-8x_2^2-2x_3^2+10x_1x_2+4x_1x_3-6x_2x_3$

б) $-5x_1^2-24x_2^2-4x_3^2+22x_1x_2-8x_1x_3+18x_2x_3$

в) $-x_1^2-3x_2^2-16x_3^2+14x_2x_3$.

ответ: Изотропные векторы могут быть описаны, например, так:

$$\text{в (а)}\ \begin{pmatrix}2&-1&2\\1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}t_1^2\\t_1t_2\\t_2^2\end{pmatrix},\quad \text{в (б)}\ \begin{pmatrix}4&-1&2\\2&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}t_1^2\\t_1t_2\\t_2^2\end{pmatrix},\quad \text{в (в)}\ \begin{pmatrix}1&1&0\\5&2&2\\2&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}t_1^2\\t_1t_2\\t_2^2\end{pmatrix},$$

где $t_1,t_2\in\mathbb{Q}$ — любые, но такие описания далеко не единственны.

ПК5⋄9. Найдите ранги грассмановых квадратичных форм **а)** $\xi_1\wedge\xi_2-5\xi_1\wedge\xi_3+4\xi_1\wedge\xi_4+\xi_1\wedge\xi_6+\xi_2\wedge\xi_3-2\xi_2\wedge\xi_4+2\xi_2\wedge\xi_5-\xi_2\wedge\xi_6+6\xi_3\wedge\xi_4-10\xi_3\wedge\xi_5+3\xi_3\wedge\xi_6+8\xi_4\wedge\xi_5-\xi_4\wedge\xi_6-2\xi_5\wedge\xi_6$ **б)** $-\xi_2\wedge\xi_3-\xi_2\wedge\xi_4+3\xi_2\wedge\xi_5-4\xi_2\wedge\xi_6+\xi_3\wedge\xi_4-7\xi_3\wedge\xi_5+8\xi_3\wedge\xi_6-4\xi_4\wedge\xi_5+4\xi_4\wedge\xi_6+3\xi_5\wedge\xi_6$.

ответ: обе формы имеют $\mathrm{rk}=4$.

[1] Здесь и далее имеется в виду ортогонал относительно поляризации заданной квадратичной формы.

[2] По отношению в стандартной евклидовой структуре в $\mathbb{R}^3$.