Программа коллоквиума по материалам первой четверти

Вопрос 1. Определение векторного пространства. Единственность нулевого вектора. Противоположный вектор $-v$ однозначно определяется по v. Соотношения $(-1)\cdot v = -v$, $0\cdot v = 0$, $\lambda\cdot 0 = 0$. Примеры векторных пространств. Определитель 2×2 и правила Крамера для разложения вектора по базису в двумерном векторном пространстве $\Bbbk^2$ и для решения систем из двух линейных уравнений на две неизвестных.

Вопрос 2. Два определения аффинного пространства, ассоциированного с данным векторным пространством. Равенства $\overrightarrow{pp} = 0$ и $\overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{qp}$. Равносильность равенств $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs}$ и $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{qs}$. Векторизация и аффинизация. Примеры аффинных пространств. Существование и единственность барицентра набора взвешенных точек. Теорема о группировании масс. Барицентрические комбинации точек, независимость барицентрической комбинации от выбора начальной точки, барицентрическая комбинация барицентрических комбинаций является барицентрической комбинацией.

Вопрос 3. Площадь ориентированного параллелограмма в двумерном векторном пространстве: её определение, свойства, существование и единственность с точностью до пропорциональности. Площадь ориентированного треугольника на аффинной плоскости. Равенства $s(abc) = s(bca) = -s(bac)$ и $s(abc) = s(pab) + s(pbc) + s(pca)$. Выражение барицентрических координат точки относительно треугольника на плоскости через площади.

Вопрос 4. Определение евклидова пространства и длины вектора. Теорема Пифагора. Ортогональная проекция и нормальная составляющая произвольного вектора по отношению к ненулевому вектору. Существование ортонормального базиса на евклидовой плоскости. Неравенства Коши – Буняковского – Шварца и треугольника.

Вопрос 5. Равенство $\det^2(u,w) = \det\begin{pmatrix}(u,u) & (u,w)\\ (w,u) & (w,w)\end{pmatrix}$ на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Положительно и отрицательно ориентированные базисы в $\mathbb{R}^2$. Ориентированный угол $\measuredangle(u,w)$ между векторами u, w. Равенства

$$\cos\measuredangle(u,w) = \cos\measuredangle(u,v)\cos\measuredangle(v,w) - \sin\measuredangle(u,v)\sin\measuredangle(v,w)$$
$$\sin\measuredangle(u,w) = \cos\measuredangle(u,v)\sin\measuredangle(v,w) + \sin\measuredangle(u,v)\cos\measuredangle(v,w)\,.$$

Вопрос 6. Определение прямой. Геометрические свойства уравнения прямой на аффинной и евклидовой плоскости. Примеры: уравнение прямой, проходящей через две данные точки, расстояние от точки до прямой, уравнение срединного перпендикуляра к отрезку и уравнения биссектрис углов между двумя заданными прямыми.

Вопрос 7. Скалярное произведение однозначно восстанавливается по функции длины. Собственное ортогональное линейное преобразование двумерного евклидова векторного пространства является поворотом, а несобственное — отражением. Собственное движение евклидовой плоскости является сдвигом или поворотом, а несобственное — скользящей симметрией[1].

Вопрос 8. Определения порождающего набора векторов, линейной зависимости и базиса в произвольном векторном пространстве. Набор линейно зависим если и только если один из векторов линейно выражается через другие. Порождающий набор является базисом тогда и только тогда, когда он линейно независим. Каждый минимальный по включению

[1] При ответе на этот вопрос разрешается без доказательства использовать тот факт, что биективное отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, переводящее прямые в прямые, является композицией сдвига и линейного изоморфизма $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$, оставляющего на месте некоторую точку.

порождающий набор является базисом. Каждый максимальный по включению линейно независимый набор является базисом. Аффинный репер и аффинные координаты точки в аффинном пространстве.

Вопрос 9. Лемма о замене. В конечно порождённом векторном пространстве любой линейно независимый набор включается в базис, любой порождающий набор содержит базис, и все базисы имеют одинаковую мощность. Определение размерности векторного пространства. В n-мерном векторном пространстве каждый линейно независимый набор из n векторов, и каждый порождающий набор из n векторов являются базисами.

Вопрос 10. В конечномерном векторном пространстве V каждое подпространство $U \subset V$ тоже конечномерно и $\dim U \leqslant \dim V$. Сумма и пресечение векторных подпространств, равенство $\dim U + \dim W = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)$ и неравенство $\dim(U \cap W) \geqslant \dim U + \dim W - \dim V$.

Вопрос 11. Трансверсальные подпространства, прямая сумма подпространств. Каждый вектор $v \in U + W$ имеет единственное представление $v = u + w$ с $u \in U$, $w \in W$ если и только если $U \cap W = 0$ и $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$. Условие на подпространства $U_1, \dots, U_m \subset V$, необходимое и достаточное для существования прямого разложения $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$.

Вопрос 12. Определение линейного отображения $f : V \to W$, равенства $f(0) = 0$ и $f(-v) = -f(v)$. Композиция линейных отображений линейна. Подпространства $\ker f$ и $\operatorname{im} f$. Равенства $f^{-1}(f(v)) = v + \ker f$ и $\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$. Линейный эндоморфизм $f : V \to V$ конечномерного векторного пространства V биективен если и только если $\ker f = 0$ и если и только если $\operatorname{im} f = V$.

Вопрос 13. Фактор пространство V/U векторного пространства V по подпространству $U \subset V$. Изоморфизм $V/\ker f \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f$ для линейного отображения $f : V \to W$. Равенство $\dim V/U = \dim V - \dim U$.

Вопрос 14. Аффинные отображения. Независимость дифференциала от выбора начальной точки. Отображение аффинно если и только если оно перестановочно со взятием барицентрических комбинаций. В n-мерном аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$ любой не содержащийся в гиперплоскости упорядоченный набор из $n+1$ точек переводится в любой упорядоченный набор из $n+1$ точек единственным аффинным отображением $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$.

Вопрос 15. При любом выборе точки p в аффинном пространстве каждое аффинное преобразование однозначно раскладывается в композицию сдвига и аффинного преобразования, оставляющего точку p на месте. Правило коммутирования аффинного отображения со сдвигом: $F \circ \tau_v = \tau_{D_F(v)} \circ F$.

Вопрос 16. Взаимное расположение двух аффинных подпространств в конечномерном аффинном пространстве.

Вопрос 17. Матрица линейного отображения. Размерность пространства линейных отображений. Матрица композиции линейных отображений.

Вопрос 18. Произведение матриц, ассоциативность и дистрибутивность умножения матриц, равенство $(AB)^t = B^t A^t$. Матрица перехода $C_{\boldsymbol{uw}}$, выражающая набор векторов $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_m)$ через набор векторов $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$, равенство $C_{\boldsymbol{uw}} = C_{\boldsymbol{uv}} C_{\boldsymbol{vw}}$.