Геометрия, лекция 10 декабря 2020г (первая половина)

Основное поле $\underline{\underline{\Bbbk = \mathbb{R}, \mathbb{C}}}$

Задан линейный оператор $F : V \longrightarrow V$, $\dim V = n$

(над $\mathbb{R}$) мы предполагаем, что F аннулируется многочленом $q(t) \in \Bbbk$, который полностью разлагается на линейные множители

$$\boxed{q(t) = \prod (t-\lambda)^{n_\lambda}}$$

λ пробегает все различные корни мн-на q.

Имеется алгебра функций $\mathcal{A} \subset U^{\Bbbk}$

$U \subset \Bbbk$ открыто

- $\Bbbk[t] \subset \mathcal{A}$
- Все функции из $\mathcal{A}$ определены на открытом множестве $U \subset \Bbbk$, содержащем все корни λ
- $\forall$ корня λ $\forall$ функции $f \in \mathcal{A}$

∃ разложение Тейлора

$$f(t) = f(\lambda) + f'(\lambda)(t-\lambda) + \ldots + \frac{f^{(m_\lambda - 1)}(\lambda)}{(m_\lambda - 1)!}(t-\lambda)^{m_\lambda - 1} +$$

$\circledast$

$$+ g(t)\cdot(t-\lambda)^{m_\lambda}, \text{ где } g(t) \in \mathcal{A}.$$

Теорема: Гомоморфизм вычисления многочленов в операторе F

$$ev_E : \Bbbk[t] \longrightarrow End(V)$$
$$f(t) \longmapsto f(F)$$

допускает единственное продолжение до гомоморфизма $ev_F : \mathcal{A} \longrightarrow End(V)$.

Док-во: единственность: пусть продолжение существует. По теореме о разложении

$$V = \bigoplus_{\lambda} \ker(\lambda E - F)^{m_\lambda}$$

λ пробегает все различные корни q

(разрешается, чтобы некоторые

$$\ker(\lambda E - F)^{m_\lambda} = 0)$$

Положим $K_\lambda = \ker(\lambda E - F)^{m_\lambda}$

Если продолжение $\alpha_V : A \to \operatorname{End} V$ существует, то подставим $t = F$ в $(*)\uparrow$

$$\forall f \in A \quad f(F) = f(\lambda)\cdot E + f'(\lambda)(F-\lambda E) + \frac{f''(\lambda)}{2}(F-\lambda E)^2 + \ldots + \frac{f^{(m_\lambda-1)}(\lambda)}{(m_\lambda-1)!}(F-\lambda E)^{m_\lambda-1} + g(F)\cdot\cancelto{0}{(F-\lambda E)^{m_\lambda}}$$

в ограничении на $K_\lambda = \ker(F-\lambda E)^{m_\lambda}$

остаточный член зануляется.

$\Downarrow$

$f(F)\big|_{K_\lambda}$ действует как многочлен

$$J_f^{(m_\lambda-1)}(t) = f(\lambda) + f'(\lambda)(t-\lambda) + \ldots + \frac{f^{(m_\lambda-1)}(\lambda)}{\quad}(t-\lambda)^{m_\lambda-1}$$

$(m_\lambda - 1)!$

$(m_\lambda-1)$-я **струя** функции f в точке λ

(jet)

Вывод: на всём пр-ве V оператор $f(F)$ действует как $P_{F,f}(t)$, где

$$P_{F,f}(t) \in \Bbbk[t] : \boxed{j^{(m_\lambda-1)}_{P_{F,f}} = j^{(m_\lambda-1)}_{f}.}$$

$\forall$ корня λ многочлена $q(t)$, аннулирующего F,

$$\begin{cases} P_{F,f}(\lambda) = f(\lambda) \\ P'_{F,f}(\lambda) = f'(\lambda) \\ \quad \dots \\ P^{(m_\lambda-1)}_{F,f}(\lambda) = f^{(m_\lambda-1)}(\lambda) \end{cases}$$

(N линейных уравнений)

$N = \sum\limits_{\lambda} m_\lambda$ $\exists!$ многочлен

$P_{F,f}(t) \in \mathbb{K}[t]$ степени $< N$

с такими свойствами

Это решение задачи полиномиальной интерполяции функции f в точках λ кратностей $m_\lambda - 1$

Значение $f(F) = P_{F,f}(F)$ совершенно однозначно определено.

Многочлен $P_{F,f}(F)$ называется интерполяционным многочленом для вычисления $f(F)$.

Замечание : $P_{F,f}$ зависит как от f, так и от F.

Замечание 2: В роли $q(t) : q(F) = 0$ можно брать любой многочлен. Корни $\lambda \notin \operatorname{Spec} F$ можно не учитывать. Проще всего обычно в роли $q(t)$ брать хар. мн-н

$$\chi_F(t) = \det(tE - F)$$

или минимальный многочлен $\mu_F(t)$, если его удалось сосчитать.

Интерполяционный многочлен определён однозначно по модулю $\underline{\underline{\mu_F(t)}}$.

существование: Рассмотрим отображение:

$\mathbb{K}[t]$ К.Т.О.

$$j : A \longrightarrow \bigoplus_{\lambda} \frac{}{((t-\lambda)^{m_\lambda})} \simeq$$

$$\simeq \frac{\Bbbk[t]}{(q(t))} \qquad \left(q(t) = \prod_{\lambda} (t-\lambda)^{m_\lambda}\right)$$

$j : f \longmapsto$ набор струй $j_f^{(m_\lambda - 1)}$ в точках λ.

$$j_f^{m_\lambda - 1}(t) = \underbrace{f(\lambda) + f'(\lambda)(t-\lambda) + \dots + \frac{f^{(m_\lambda-1)}(\lambda)}{(m_\lambda - 1)!}(t-\lambda)^{m_\lambda - 1}}_{\text{как элемент } \frac{\Bbbk[t]}{((t-\lambda)^{m_\lambda})}}$$

$$\boxed{ev_F : \frac{\Bbbk[t]}{(q(t))} \longrightarrow \mathrm{End}(V).}$$

Утв.: $ev_F \circ j : A \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ это гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр. (корректно определённый).

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk[t] \arrow[r, "ev_F"] \arrow[d, two heads, "\pi"] & \operatorname{End}(V) \\
\dfrac{\Bbbk[t]}{(q(t))} \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

$$[g]_q \mapsto g(F)$$

корректно.

$$[g_1]_q = [g_2]_q \qquad g_1 = g_2 + q\cdot h$$

$$g_1(F) = g_2(F) + \underbrace{\cancel{q(F)}}_{0}\cdot h(F)$$

Отображение джетов

$$j: A \longrightarrow \frac{\Bbbk[t]}{(q(t))} = \bigoplus \frac{\Bbbk[t]}{((t-\lambda)^{m_\lambda})}$$

это гомоморфизм алгебр.

Достаточно проверить, что каждая стрелка в отдельности является гомоморф. функц алгебр.

$$\Bbbk[t]$$

$$f \longrightarrow \frac{}{((t-\lambda)^{m_\lambda})}$$

$$f(t) \longmapsto \sum_{k=0}^{m_\lambda-1} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!}(t-\lambda)^k$$

𝕂-линейность очевидна.

$$f\cdot g \longmapsto j(f)\cdot j(g),$$ т.е.

в кольце вычетов $\boxed{\mathbb{K}[t]/((t-\lambda)^{m_\lambda})}$

выполняется равенство

$$\sum_{k\geq 0} \frac{[f\cdot g]^{(k)}(\lambda)}{k!}(t-\lambda)^k =$$

$$= \sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!}(t-\lambda)^k \cdot$$

$$\cdot \sum_{m\geq 0} \frac{f^{(m)}(\lambda)}{m!}(t-\lambda)^m$$

$$[f\cdot g]^k = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{k!}{\nu!\,(k-\nu)!} f^{(\nu)} \cdot g^{(k-\nu)}$$

$$[f\cdot g]'' = f'' + 2f'g' + g''$$

$$\sum_{k\geq 0}\sum_{\nu\geq 0}\frac{f^{(\nu)}(\lambda)\,g^{(k-\nu)}(\lambda)}{\nu!\,(k-\nu)!}(t-\lambda)^{k}$$

$$'' \quad (t-\lambda)^{\nu}(t-\lambda)^{k-\nu}$$

Теорема доказана!